

DIKTAT

Mata Kuliah

METODE NUMERIK

Oleh:

I Ketut Adi Atmika

**JURUSAN TEKNIK MESIN
FAKULTAS TEKNIK
UNIVERSITAS UDAYANA
2016**

KATA PENGANTAR

Diktat ini disusun untuk memudahkan mahasiswa dalam memahami beberapa metode numerik untuk menyelesaikan persamaan-persamaan matematika yang sukar atau tidak dapat diselesaikan secara analitis. Metode Numerik dapat digunakan dalam berbagai bidang ilmu yang mempunyai formulasi persamaan dalam bentuk matematis. Keunggulan Metode Numerik adalah mampu menyelesaikan persamaan-persamaan yang kompleks yang tidak dapat diselesaikan secara analitis.

Penyelesaian persamaan akan lebih baik dan lebih cepat dengan bantuan komputer. Beberapa logika pemrograman dalam bentuk flowchart akan ditampilkan pada masing-masing sub bahasan. Dengan program bantu seperti Basic, Pascal, Fortran, Delphi, atau yang lebih baru yaitu Matlab, logika pemrograman yang ada dapat dimasukkan ke program komputer diatas.

Prasyarat untuk dapat mengikuti materi dalam buku ini, pembaca harus sudah pernah mendapat pelajaran kalkulus, determinan, persamaan diferensial biasa, deret Taylor, Logika Pemrograman.

Semoga diktat ini bermanfaat bagi pembaca

Denpasar, Maret 2016

Penulis

DAFTAR ISI

Kata Pengantar	i
Daftar Isi	ii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1. Umum	1
1.2. Kesalahan	1
1.3. Kesalahan Absolut dan Relatif	3
BAB II AKAR-AKAR PERSAMAAN	
2.1. Pendahuluan	6
2.2. Bisection Method	7
2.3. Regulafalsi Method	10
2.4. Newton Method	14
2.5. Secant Method	17
2.6. Direct Method	20
2.7. Soal-soal Latihan	22
BAB III SISTEM PERSAMAAN LINIER	
3.1. Pendahuluan	23
3.2. Metode Eliminasi Gauss	24
3.3. Metode Gauss Jordan	26
3.4. Metode Jacobi	27
3.5. Metode Gauss Seidel	30
3.6. Soal-soal Latihan	32
BAB IV PERSAMAAN NON LINIER SIMULTAN	
4.1. Direct Iteration	33
4.2. Soal-soal Latihan	37
BAB V REGRESI	
5.1. Pendahuluan	38
5.2. Regresi Linier	38
5.3. Regresi Non Linier	41
5.4. Regresi Polinomial	45
5.5. Latihan Soal	48
BAB VI INTERPOLASI	
6.1. Pendahuluan	50
6.2. Interpolasi linier	50
6.3. Interpolasi Kwadrat/Polinomial	52
6.4. Bentuk Umum Interpolasi Polinomial	53
6.5. Interpolasi Lagrange	55
6.6. Soal-soal Latihan.	57

BAB VII INTEGRASI NUMERIK	
7.1. Metode Trapesium satu Pias	59
7.2. Metode Trapesium Banyak Pias	60
7.3. Metode Simpson 1/3 Pias	61
7.4. Metode Simpson 1/3 Banyak Pias	63
7.5. Metode Simpson 3/8 Satu Pias	64
7.6. Integral dengan Panjang Pias Tidak Sama	65
7.7. Metode Kwadratur	66
7.8. Soal-soal Latihan	72
BAB VIII PERSAMAAN DIFERENSIAL	
8.1. Pendahuluan	73
8.2. Metode Euller	76
8.3. Metode Euller Yang Dimodifikasi	78
8.4. Metode Runge Kutta	80
8.5. Persamaan Differensial Parsiil	81
8.6. Beberapa Bentuk Persamaan Differensial Parsiil	83
8.7. Perkiraan Differensial Dengan Beda Hingga	84
8.8. Penyelesaian Persamaan Parabola	86
8.9. Penyelesaian Persamaam Ellips	89
DAFTAR PUSTAKA	94

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Umum

Metode numerik adalah teknik penyelesaian permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitungan. Dalam metode numerik ini dilakukan operasi hitungan dalam jumlah yang banyak dan prosesnya berulang. Sehingga dalam prakteknya perlu bantuan komputer untuk menyelesaikan hitungan tersebut. Tanpa bantuan komputer, metode numerik tidak banyak memberikan manfaat.

Metode numerik merupakan alat yang sangat ampuh untuk menyelesaikan permasalahan dalam berbagai bidang. Metode numerik mampu menyelesaikan suatu sistim persamaan yang besar, persamaan yang tidak linier dan persamaan yang kompleks yang tidak mungkin diselesaikan secara analitis. Metode numerik bisa digunakan dalam berbagai bidang ilmu, seperti bidang teknik (teknik mesin, teknik sipil, teknik elektro, teknik kimia dan sebagainya), kedokteran, sosial, ekonomi dan bidang ilmu lainnya. Berbagai masalah yang ada dalam berbagai disiplin ilmu dapat digambarkan dalam bentuk matematik dari berbagai fenomena yang berpengaruh. Misalnya gerak air dan polutan di saluran, sungai dan laut, aliran udara, perambatan panas. Biasanya fenomena yang berpengaruh tersebut cukup banyak dan sangat kompleks, dan untuk menyederhanakannya diperlukan suatu asumsi, sehingga beberapa bisa diabaikan. Meskipun telah dilakukan penyederhanaan, namun sering persamaan tersebut tidak bisa diselesaikan secara analitis. Untuk itu diperlukan metode numerik untuk menyelesaikannya.

1.2. Kesalahan (error)

Penyelesaian secara numerik suatu persamaan matematik hanya memberikan nilai perkiraan yang mendekati nilai sebenarnya (nilai eksak), Berarti dalam penyelesaian numerik terdapat kesalahan terhadap nilai sebenarnya. Ada tiga macam kesalahan yaitu:

1. Kesalahan bawaan
2. Kesalahan pembulatan

3. Kesalahan pemotongan

Kesalahan bawaan adalah kesalahan dari nilai data. Kesalahan tersebut bisa terjadi karena kekeliruan dalam menyalin data, salah membaca skala, atau kesalahan karena kurangnya pengertian mengenai hukum-hukum fisik dari data yang diukur.

Kesalahan pembulatan terjadi karena tidak diperhitungkannya beberapa angka terakhir dari suatu bilangan. Kesalahan ini terjadi apabila bilangan perkiraan digunakan untuk menggantikan bilangan eksak. Suatu bilangan dibulatkan pada posisi ke n dengan membuat semua angka disebelah kanan dari posisi tersebut sama dengan nol. Sedangkan angka pada posisi ke n tersebut tidak berubah atau tidak dinaikkan satu digit.

Contoh:

86743242 dapat dibulatkan menjadi 86743000

3,1415926 dapat dibulatkan menjadi 3,14

Beberapa aturan pembulatan bilangan sampai n angka yang berarti dengan membuang semua angka disebelah kanan dari angka ke n tersebut:

1. Jika bilangan yang dibuang kurang dari setengah satuan dari bilangan ke n, maka angka ke n tetap tidak berubah.

Contoh:

29,63243 dibulatkan menjadi 29,63

2. Jika bilangan yang dibuang lebih dari setengah satuan dari bilangan ke n, maka angka ke n dinaikkan satu tingkat.

Contoh:

81,9773 dibulatkan menjadi 81,98

3. Jika bilangan yang dibuang tepat setengah satuan dari bilangan yang ke n, maka angka yang ke n tetap tidak berubah jika angka yang ke n tersebut adalah genap, dan dinaikkan satu digit jika angka yang ke n tersebut ganjil. Sehingga angka yang ke n akan selalu genap.

Contoh :

46,35 dibulatkan menjadi 46,4

48,45 dibulatkan menjadi 48,4

Kesalahan pemotongan terjadi karena tidak dilakukan hitungan sesuai dengan prosedur matematik yang benar. Sebagai contoh, suatu proses yang tak berhingga diganti dengan proses hingga.

Contoh:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Akan terjadi kesalahan jika persamaan diatas dipotong beberapa suku :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

1.3. Kesalahan Absolut dan Relatif

Hubungan antara nilai eksak, nilai perkiraan dan kesalahan dapat diberikan dalam bentuk berikut ini :

$$p = p^* + Ee$$

dimana :

p : nilai eksak

p^* : nilai perkiraan

Ee : kesalahan terhadap nilai eksak

Indeks e menunjukkan bahwa kesalahan dibandingkan terhadap nilai eksak. Dari bentuk persamaan diatas maka didapat bahwa kesalahan adalah perbedaan antara nilai eksak dan nilai perkiraan,

$$Ee = p - p^*$$

..... (1.1)

Bentuk kesalahan seperti diberikan oleh persamaan (1.1) disebut dengan kesalahan absolut. Kesalahan absolut tidak menunjukkan besarnya tingkat kesalahan. Sebagai contoh, kesalahan 1 cm pada pengukuran pensil akan sangat terasa dibanding dengan kesalahan yang sama pada pengukuran panjang jembatan.

Besarnya tingkat kesalahan dapat dinyatakan dalam bentuk kesalahan relatif, yaitu dengan membandingkan kesalahan yang terjadi dengan nilai eksak.

$$\varepsilon_e = \frac{E_e}{p} \quad (1.2)$$

Dengan ε_e adalah kesalahan relatif terhadap nilai eksak.

Kesalahan relatif sering diberikan dalam bentuk persen seperti berikut ini.

$$\varepsilon_e = \frac{E_e}{p} \times 100 \% \quad (1.3)$$

Dalam persamaan (1.1), (1.2) dan (1.3) kesalahan dibandingkan terhadap nilai eksak. Nilai eksak tersebut hanya dapat diketahui apabila suatu fungsi dapat diselesaikan secara analistis. Dalam metode numerik, biasanya nilai tersebut tidak diketahui. Untuk itu kesalahan dinyatakan berdasarkan pada nilai perkiraan terbaik dari nilai eksak, sehingga kesalahan mempunyai bentuk berikut ini.

$$\varepsilon_a = \frac{p_*^{n+1} - p_*^n}{p_*^{n+1}} \times 100 \% \quad (1.4)$$

dimana :

ε : kesalahan terhadap nilai perkiraan terbaik.

p_* : nilai perkiraan terbaik.

Indeks a menunjukkan bahwa kesalahan dibandingkan terhadap nilai perkiraan (approximate value).

Didalam metode numerik, sering dilakukan pendekatan secara iteratif. Pada pendekatan tersebut perkiraan sekarang dibuat berdasarkan perkiraan sebelumnya. Dalam hal ini kesalahan adalah perbedaan antara perkiraan sebelumnya dan perkiraan sekarang, dan kesalahan relatif diberikan oleh bentuk:

$$\varepsilon_a = \frac{p_*^{n+1} - p_*^n}{p_*^{n+1}} \quad (1.5)$$

dimana :

p_*^n : nilai perkiraan pada iterasi ke n

p_*^{n+1} : nilai perkiraan pada iterasi n+1

Contoh.

Pengukuran panjang jembatan dan pensil menghasilkan 9999 cm dan 9 cm. Apabila panjang yang benar (eksak) adalah 10.000 cm dan 10 cm, hitung kesalahan absolut dan relatif.

Penyelesaian

a. Kesalahan absolut,

- Jembatan :

$$E_e = 10.000 - 9999 = 1 \text{ cm.}$$

- Pensil :

$$E_e = 10 - 9 = 1 \text{ cm}$$

b. Kesalahan relatif,

- Jembatan

$$\varepsilon_e = \frac{E_e}{p} \times 100 \% = \frac{1}{10.000} \times 100\% = 0,01\%$$

- Pensil :

$$\varepsilon_e = \frac{E_e}{p} \times 100 \% = \frac{1}{10} \times 100\% = 10\%$$

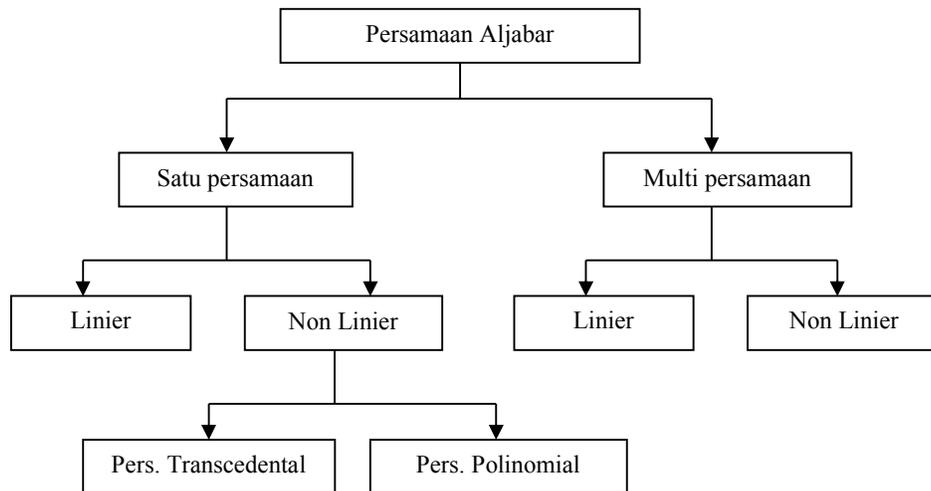
Contoh tersebut menunjukkan bahwa meskipun kedua kesalahan adalah sama yaitu 1 cm, tetapi kesalahan relatif pensil jauh lebih besar. Kesimpulan yang dapat diambil bahwa pengukuran jembatan memberikan hasil yang baik (memuaskan), sementara hasil pengukuran pensil tidak memuaskan.

BAB II

AKAR-AKAR PERSAMAAN

2.1. Pendahuluan

Sistem persamaan aljabar dapat diuraikan seperti bagan dibawah ini:



Bentuk-bentuk persamaan transcedental : $\sin x$, $\cos x$, $\text{tg } x$, e^x , $\log x$

Bentuk-bentuk persamaan polinomial : $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$

Bentuk persamaan kuadrat dengan bentuk $ax^2 + bx + c = 0$ mudah dicari akar-akar persamaannya. Untuk polinomial derajat tiga atau empat, rumus yang ada sangat kompleks dan jarang sekali digunakan. Sedangkan untuk persamaan-persamaan dengan derajat yang lebih tinggi tidak ada rumus yang dapat digunakan untuk menyelesaikannya. Cara satu-satunya adalah dengan menggunakan metode numerik. Bentuk-bentuk persamaan tersebut antara lain:

$$x^4 + x^2 + 2x + 20 = 0$$

$$e^x - 3x = 0$$

$$3x - \sin x - e^x = 0$$

Penyelesaian numerik dilakukan dengan iterasi, sehingga setiap hasil yang didapat selalu lebih teliti dibandingkan iterasi sebelumnya.

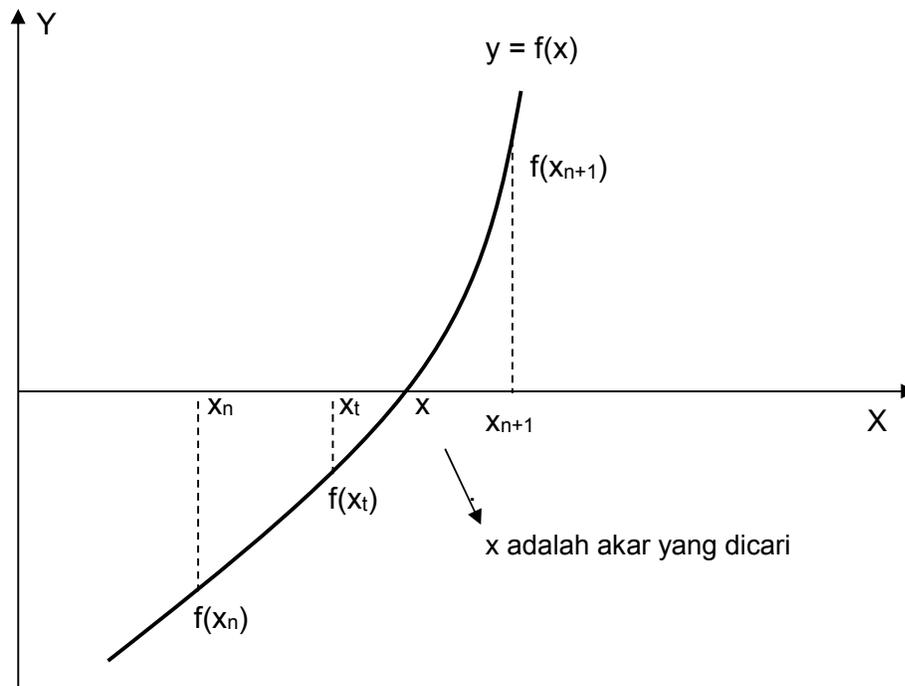
Ada beberapa metode yang digunakan untuk menghitung akar-akar persamaan yaitu:

1. Bisection Method (Metode Setengah Interval)
2. Regula-falsi Method
3. Newton Method
4. Secant Method
5. Direct Method (Metode Iterasi)

2.2. Bisection Method (Metode Setengah Interval)

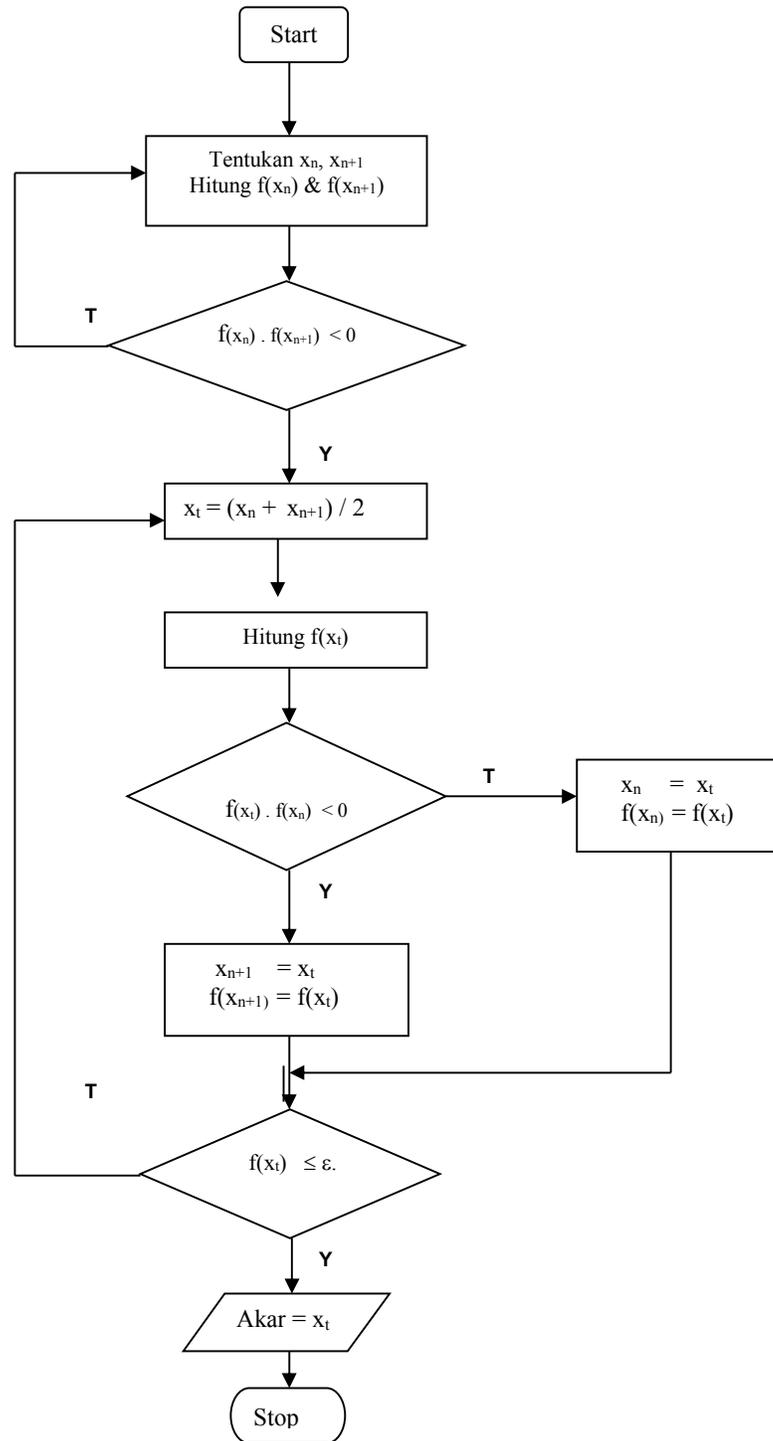
Metode setengah interval merupakan metode yang paling mudah dan sederhana dibandingkan metode lainnya. Adapun sifat dari metode ini:

1. Konvergensi lambat
2. Caranya mudah
3. Tidak dapat digunakan mencari akar imajiner
4. Hanya dapat mencari satu akar dalam satu siklus



Gambar 2.1
Metode setengah interval

Flowchart Metode Setengah Interval:



Gambar 2.2
Flow Chart Metode Setengah Interval

Langkah-langkah perhitungan bisection methods:

1. Tentukan sembarang titik x_1 dan x_2 , kemudian hitung nilai fungsinya yaitu $f(x_1)$ dan $f(x_2)$.
2. Cek $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$. Artinya $f(x_1)$ dan $f(x_2)$ harus berbeda tanda.
3. Hitung nilai x_t .

$$x_t = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

4. Hitung nilai fungsi $f(x_t)$
5. Cek $f(x_t) \cdot f(x_1) < 0$
Jika ya maka nilai x_2 yang baru adalah nilai x_t , sedangkan nilai x_1 tetap.
Jika tidak maka nilai x_1 yang baru adalah nilai x_t , sedangkan nilai x_2 tetap
6. Cek apakah $|f(x_t)| \leq \varepsilon$ dimana ε adalah bilangan yang kecil yang ditentukan nilainya oleh user atau pengguna. Nilai $\varepsilon = 10^{-5}$ sudah termasuk bagus.
7. Kalau nilai $|f(x_t)| \leq \varepsilon$ maka x_t adalah salah satu akar dari persamaan
8. Kalau nilai $|f(x_t)| > \varepsilon$ maka proses akan berulang ke langkah 3, demikian seterusnya sampai diperoleh nilai $|f(x_t)| \leq \varepsilon$.

Contoh 1.

Hitung salah satu akar dari persamaan pangkat tiga:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$

Cek dengan $\varepsilon = 0,0001$

Jawab :

Dengan mengikuti alur flow chart diatas diperoleh:

1. $x_n = 1$ dan $x_{n+1} = 2$. Harga-harga ini ditentukan sembarang nilainya.
2. $f(x_n) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 3 = -4$
 $f(x_{n+1}) = 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 - 3 = 3$
3. $f(x_n) \cdot f(x_{n+1}) = -4 \cdot 3 = -12$ (nilainya negatif, berarti < 0)
4. Hitung $x_t = (x_n + x_{n+1})/2 = (1 + 2)/2 = 1,5$
5. Hitung $f(x_t) = 1,5^3 + 1,5^2 - 3 \cdot 1,5 - 3 = -1,875$
6. Cek : $f(x_t) \cdot f(x_n) = - \cdot - = +$

Karena nilainya positif (+) berarti lebih besar dari nol sehingga nilai x_n yang baru = x_t

Atau $x_n = 1,5$, dan $f(x_n) = f(x_t) = -1.875$

Sedangkan nilai x_{n+1} nilainya tetap yaitu 2

Cek nilai mutlak $f(x_t) = |f(x_t)| = 1.875 > \varepsilon$ sehingga proses berulang dengan menentukan nilai x_t yang baru, dengan $x_n = 1,5$ dan $x_{n+1} = 2$

7. Langkah selanjutnya proses berlanjut ke langkah 4. Demikian seterusnya sampai diperoleh $|f(x_t)| \leq \varepsilon$

Hasilnya kalau ditampilkan dalam bentuk tabel, seperti tabel berikut ini:

Iterasi	x_n	x_{n+1}	x_t	$f(x_n)$	$f(x_{n+1})$	$f(x_t)$	$f(x_t) \cdot f(x_n)$
1	1	2	1,5	- 4	3	-1,875	+
2	1,5	2	1,75	- 1,875	3	0,17187	-
3	1,5	1,75	1,625	- 1,875	0,17187	-0,94335	+
4	1,625	1,75	1,6875	- 0,94335	0,17187	0,40942	-
5			.			.	
.			.			.	
.			.			.	
∞			1,73205			0,0000000	...

2.3. Regula-falsi Method

Dibandingkan metode setengah interval, metode regula-falsi konvergensinya (kecepatan mencapai akar persamaan) lebih cepat, dan iterasi yang dibutuhkan lebih pendek. Perhitungan metode regula-falsi berdasarkan interpolasi linier antara dua harga $f(x)$ yang mempunyai tanda berbeda.

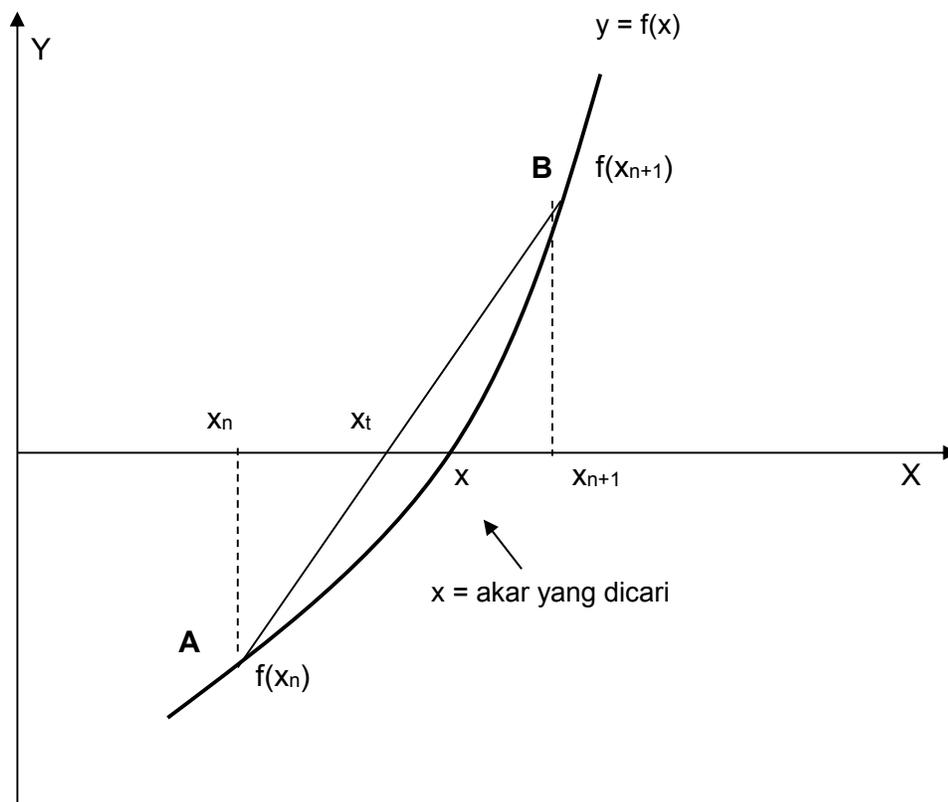
Mula-mula diambil nilai x_n dan x_{n+1} sembarang (gambar 2.3) kemudian dihitung $f(x_n)$ dan $f(x_{n+1})$. Syaratnya $f(x_n)$ dan $f(x_{n+1})$ harus berbeda tanda. Selanjutnya ditarik garis dari $f(x_n)$ menuju $f(x_{n+1})$. Garis ini akan memotong sumbu x di x_t . Posisi x_t inilah yang dicari melalui persamaan garis yang menghubungkan titik **A** [$x_n, f(x_n)$] dengan titik **B** [$x_{n+1}, f(x_{n+1})$]

Persamaan garis tersebut dapat dirumuskan:

$$\frac{x_t - x_n}{x_{n+1} - x_n} = \frac{0 - f(x_n)}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}$$

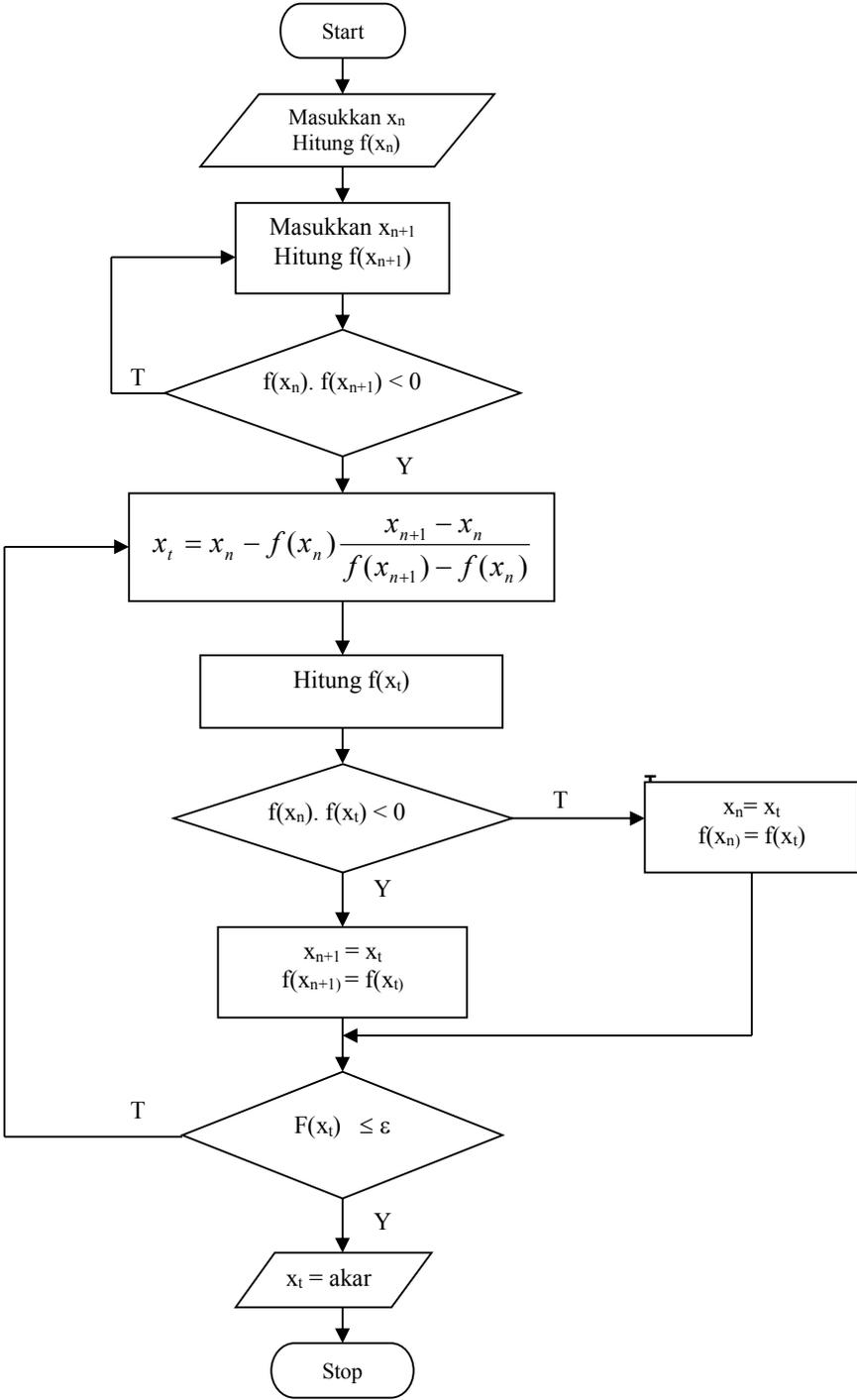
Sehingga nilai x_t dapat dihitung:

$$x_t = x_n - f(x_n) \frac{x_{n+1} - x_n}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}$$



Gambar 2.3.
Metode Regula Falsi

Flowchart Metode Regula Falsi



Gambar 2.4.
Flow Chart Metode Regula Falsi

Contoh 2.

Hitung salah satu akar dari persamaan pangkat tiga:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$

Cek dengan $\varepsilon = 0,0001$

Jawab

Dengan mengikuti alur flow chart diatas diperoleh:

1. Ambil sembarang nilai awal $x_n = 1$; $f(x_n) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 3 = -4$
2. Ambil sembarang nilai $x_{n+1} = 2$. : $f(x_{n+1}) = 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 - 3 = 3$
3. $f(x_n) \cdot f(x_{n+1}) = -4 \cdot 3 = -12$ (nilainya negatif, berarti < 0)
4. Hitung $x_t = x_n - f(x_n) (x_{n+1} - x_n) / (f(x_{n+1}) - f(x_n))$
$$x_t = 1 - (-4) (2 - 1) / (3 - (-4)) = 1,57142$$
5. Hitung $f(x_t) = 1,57142^3 + 1,57142^2 - 3 \cdot 1,57142 - 3 = -1,3644$
6. $| f(x_t) | > \varepsilon$
7. Cek : $f(x_n) \cdot f(x_t) = -4 \cdot (-1,3644) = +$ (lebih besar dari nol), maka proses akan berulang dengan menentukan x_n dan $f(x_n)$ yang baru, sedangkan nilai x_{n+1} dan $f(x_{n+1})$ tetap.
8. $x_n = x_t = 1,57142$: $f(x_n) = f(x_t) = -1,3644$
 $x_{n+1} = 2$: $f(x_{n+1}) = 3$.
9. Nilai x_t yang baru:
$$x_t = x_n - f(x_n) (x_{n+1} - x_n) / (f(x_{n+1}) - f(x_n))$$

$$x_t = 1,57142 - (-1,3644) (2 - 1,57142) / (3 - (-1,3644)) = 1,7054$$
10. Hitung nilai $f(x_t)$ yang baru;
$$f(x_t) = 1,7054^3 + 1,7054^2 - 3 \cdot 1,7054 - 3 = -0,2478$$
11. Cek $f(x_t)$ dengan ε ;
12. $| f(x_t) | = |-0,2478| = 0,2478 > \varepsilon$, sehingga proses iterasi akan berulang sampai diperoleh $f(x_t) \leq \varepsilon$

Hasilnya kalau ditampilkan dalam bentuk tabel, seperti tabel berikut ini:

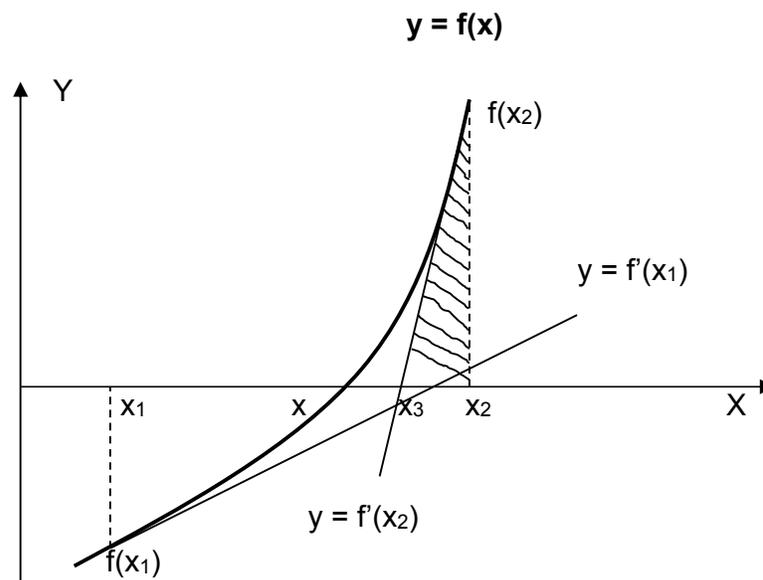
Iterasi	x_n	x_{n+1}	x_t	$f(x_n)$	$f(x_{n+1})$	$f(x_t)$	$f(x_t) \cdot f(x_n)$
1	1	2	1,57142	-4	3	-1,3644	+

2	1,5714	2	1,7054	- 1,3644	3	-0,2478	+
3	1,7054	2	1,7278	-0,2478	3	-0,03936	+
4	1,7278	2	1,7314	-0,03936	3	-0,00615	+
5	1,7314	2	1.73194	-0,00615		.	
.			.			.	
∞			1,73205			0,0000000	
						...	

2.4. Newton Method

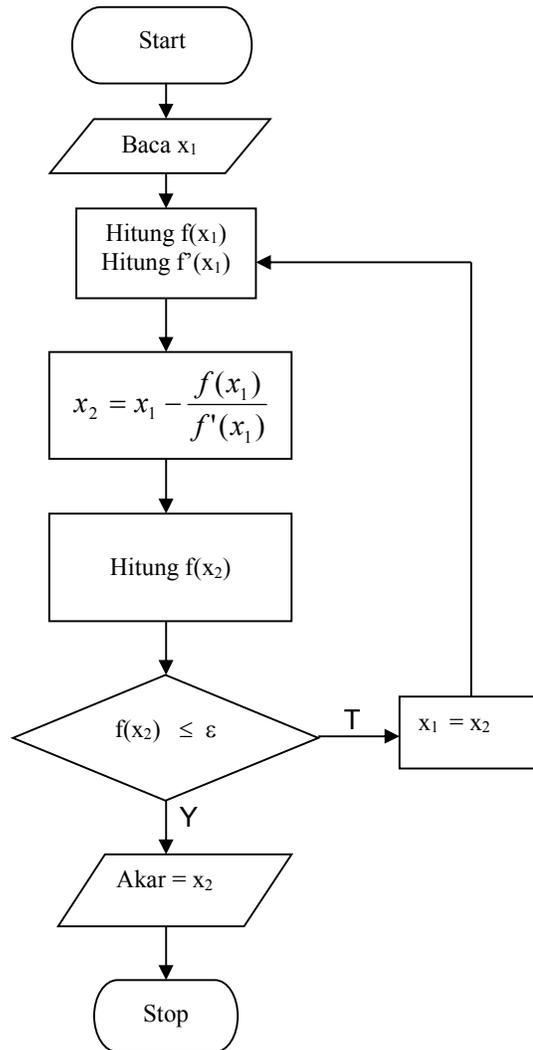
Kedua metode yang dibahas sebelumnya dirasakan belum memuaskan sehingga Newton memperkenalkan metode baru sesuai dengan namanya yaitu Metode Newton. Beberapa sifat dari Metode Newton antara lain:

1. Tidak perlu mencari dua fungsi yang berbeda tanda.
2. Konvergensi lebih cepat
3. Perlu menghitung turunan fungsi $f'(x)$



Gambar 2.5
Metode Newton

Flowchart Metode Newton:



Gambar 2.6
Flow Chart Metode Newton

Langkah-langkah penyelesaian Newton Method secara grafis (lihat gambar 2.5):

1. Tentukan sembarang titik x_1 , kemudian hitung $f(x_1)$.
2. Buat garis singgung pada $f(x_1)$ sehingga memotong sumbu x di x_2 .
3. Dari x_2 tarik garis keatas sehingga memotong kurva fungsi di $f(x_2)$
4. Buat garis singgung pada $f(x_2)$ sehingga memotong sumbu x di x_3
5. Dari x_3 tarik garis keatas sehingga memotong kurva fungsi di $f(x_3)$

6. Demikian seterusnya sampai mendekati titik x , dimana titik x inilah salah satu akar dari persamaan.

Secara analitis:

Dari gambar 2.5 perhatikan segitiga yang diarsir:

$$f'(x_2) = \frac{f(x_2)}{x_2 - x_3}$$

Atau lebih umum

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

atau

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Contoh 3.

Hitung salah satu akar dari persamaan pangkat tiga:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$

$$\text{Cek dengan } \varepsilon = 0,0001$$

Jawab

Dengan mengikuti alur flow chart diatas diperoleh:

1. Ambil sembarang nilai awal $x_1 = 1$
2. $f(x_1) = 1^3 + 1^2 - 3(1) - 3 = -4$
3. $f'(x_1) = 3x^2 + 2x - 3 = 3(1)^2 + 2(1) - 3 = 2$
4. Hitung x_2

$$x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$$

$$x_2 = 1 - (-4)/2 = 3$$

5. Hitung $f(x_2) = 3^3 + 3^2 - 3(3) - 3 = 24$

6. $|f(x_2)| = 24 > \varepsilon$, maka proses berulang dengan nilai x_1 yang baru yaitu

$$x_1 = x_2 = 3$$

7. Langkah selanjutnya kembali ke langkah 2 dan seterusnya sampai diperoleh kondisi

$$\text{diperoleh } |f(x_t)| \leq \varepsilon$$

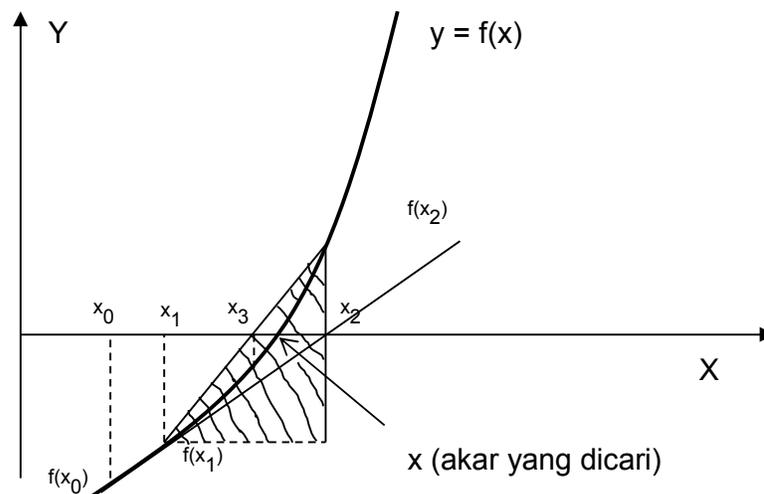
Dalam bentuk tabel dapat dituliskan sebagai berikut:

Iterasi	x_1	$f(x_1)$	x_2	$f(x_2)$
1	1	-4	3	24
2	3	24	2,2	5,888
3	2,2	5,888	1,83	0,98738
4	1,83	0,98738	1,73778	0,05442
5	1,73778	0,054442	1,73207	0,0001816
.				.
∞			1,73205	0,000000

2.5. Secant Method

Beberapa sifat dari Metode Secant:

1. Merupakan kombinasi antara Newton Method dengan Regula-falsi Method.
2. Tidak perlu mencari turunan fungsi $f'(x_n)$, Ini sangat menguntungkan karena tidak semua fungsi mudah ditentukan turunannya.



Gambar 2.7
Secant method

Langkah-langkah penyelesaian secara grafis (lihat gambar 2.7):

1. Tentukan nilai x_0 dan x_1 sembarang, kemudian tarik garis vertikal dari titik x_0 dan x_1 , sehingga diperoleh nilai $f(x_0)$ dan $f(x_1)$.
2. Hubungkan titik $f(x_0)$ dengan $f(x_1)$. sehingga memotong sumbu x di x_2 . Dari x_2 ditarik garis vertikal sehingga diperoleh nilai $f(x_2)$.
3. Hubungkan titik $f(x_1)$ dengan $f(x_2)$. sehingga memotong sumbu x di x_3 . Dari x_3 ditarik garis vertikal sehingga diperoleh nilai $f(x_3)$.
4. Demikian proses berulang sehingga diperoleh nilai x yang merupakan akar dari persamaan.

Secara analitis :

Perhatikan segitiga yang diarsir:

$$f'(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (*)$$

Dari persamaan Newton Method:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \quad (**)$$

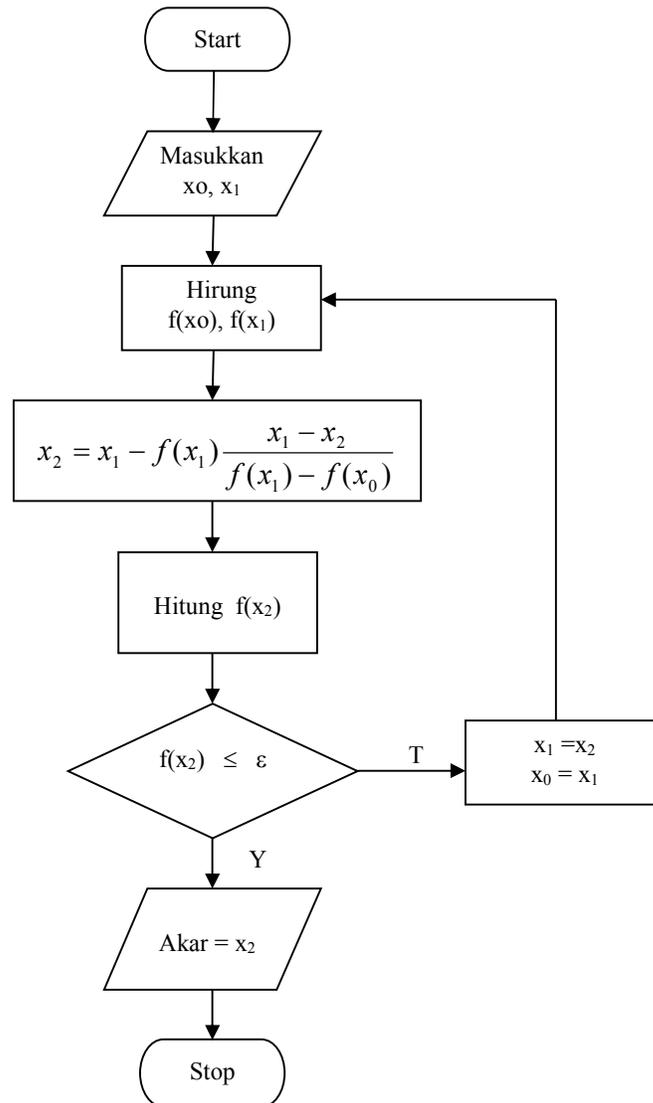
Masukkan persamaan (*) ke persamaan (**) sehingga diperoleh:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

Atau dalam bentuk yang umum:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Flow Chart Secant Method



Gambar 2.8
Secant Method

Contoh 4.

Hitung salah satu akar dari persamaan pangkat tiga:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$

Cek dengan $\epsilon = 0,0001$

Jawab

Dengan mengikuti alur flowchart diatas diperoleh:

1. Ambil sembarang nilai awal $x_0 = 1$ dan $x_1 = 2$

$$f(x_0) = 1^3 + 1^2 - 3(1) - 3 = -4$$

$$f(x_1) = 2^3 + 2^2 - 3(2) - 3 = 3$$

2. Hitung x_2

$$x_2 = x_1 - f(x_1)(x_1 - x_0) / (f(x_1) - f(x_0))$$

$$x_2 = 2 - 3(2-1) / (3 - (-4))$$

$$x_2 = 1,57142$$

3. Hitung $f(x_2) = (1,57142)^3 + (1,57142)^2 - 3(1,57142) - 3 = -1,3644$

4. $|f(x_2)| = 1,3644 > \varepsilon$, maka proses berulang dengan nilai x_1 yang baru yaitu

$$x_1 = x_2 = 1,57142 \text{ dan } x_0 = x_1 = 2$$

5. Langkah selanjutnya kembali ke langkah 2 dan seterusnya sampai diperoleh kondisi $|f(x_i)| \leq \varepsilon$

Hasil perhitungan diatas dapat ditampilkan dalam bentuk tabel berikut:

Iterasi	x_0	x_1	$f(x_0)$	$f(x_1)$	x_2	$f(x_2)$
1	1	2	-4	3	1,57142	-1,36449
2	2	1,57142	3	-1,36449	1,70540	-0,24784
3	1,57142	1,70540	-1,36449	-0,24784	1,73513	0,029000
4	1,70540	1,73513	-0,24784	0,029000	1,73199	-0,000575
5	1,73513	1,73199			1,73205	

2.6. Direct Method (Metode Iterasi)

Dalam metode iterasi ini digunakan suatu persamaan untuk memperkirakan nilai akar suatu persamaan yang dicari. Persamaan ini dikembangkan dari dari fungsi $f(x) = 0$ sehingga parameter x berada disisi kiri persamaan yaitu:

$$x = g(x)$$

Dengan kata lain fungsi $f(x) = 0$ dirubah menjadi $x = g(x)$.

Persamaan $x = g(x)$ menunjukkan bahwa nilai x merupakan fungsi dari x . Sehingga dengan memberikan nilai perkiraan awal dari x_i , maka dapat dihitung nilai x_{i+1} , dengan rumus iterasi:

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

Untuk $i = 1$; $x_2 = g(x_1)$

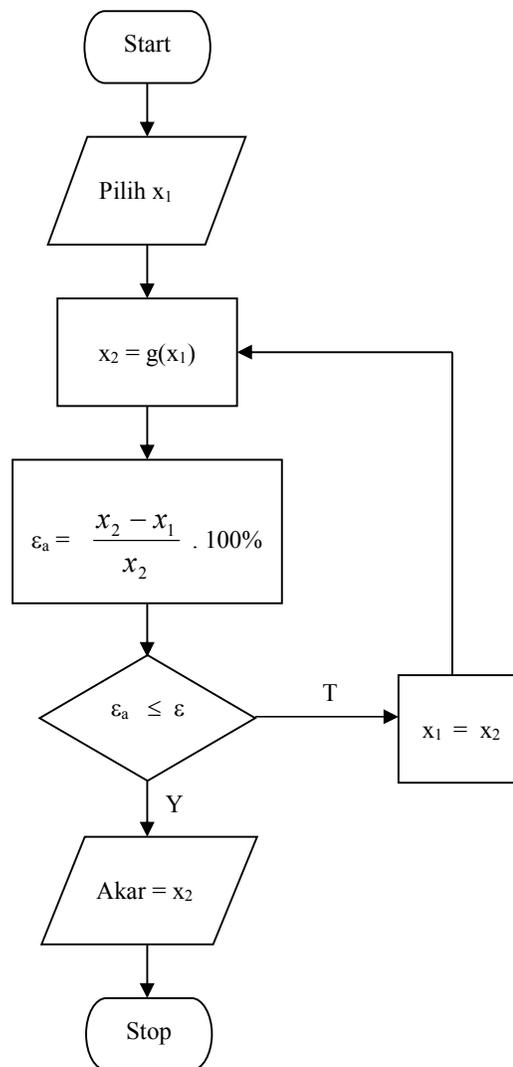
Untuk $i = 2$; $x_3 = g(x_2)$

dst.

Besar kesalahan dapat dihitung dari rumus:

$$\epsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \times 100\%$$

Flow Chart Direct Method



Gambar 2.9
Flow Chart Direct Method

Contoh 5.

Hitung salah satu akar dari persamaan pangkat tiga:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$

Cek dengan $\varepsilon = 0,0001$

Jawab:

1. Ubah persamaan diatas kedalam bentuk $x = g(x)$

$$x^3 = (-x^2 + 3x + 3), \text{ atau}$$

$$x = (-x^2 + 3x + 3)^{1/3}$$

2. Persamaan iterasinya:

$$X_2 = (-x_1^2 + 3x_1 + 3)^{1/3}$$

3. Errornya:

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| \times 100\%$$

Sehingga dalam bentuk tabel:

Iterasi	x_1	x_2	ε_a (%)	ε
1	1	1,709	41,519	0,0001
2	1,709	1,733	1,3951	0,0001
3	1,733	1,732	0,0576	0,0001
4	1,732	1,732053	$3,08 \cdot 10^{-3}$	0,0001
5	1,732053	1,732050	$1,33 \cdot 10^{-4}$	0,0001

Sehingga akar persamaan $x = 1,732050$ dengan error 0,000133 %

2.7. Soal-soal latihan.

1. $x^3 - 7x + 1 = 0$

2. $e^x - x - 2 = 0$

3. $\sin x = 3x - 2$

4. $10^x = 100 - 2x$

5. $\cos x = 3x$

6. $x^x = 10$

Hitung akar-akar persamaan diatas dengan menggunakan metode yang telah dipelajari.

BAB III

SISTIM PERSAMAAN LINIER

.....

3.1. Pendahuluan

Sebelum membahas sistim persamaan linier, sebaiknya kita mereview sedikit tentang matrik.

Dasar-dasar matrik:

- a. Matrik Simetri: jika elemen baris nilainya sama dengan elemen kolom.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

- b. Matrik Diagonal: jika semua elemen nilainya sama dengan nol kecuali diagonal utama.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

- c. Matrik Identitas: jika semua elemen nilainya sama dengan nol kecuali diagonal utama bernilai satu.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- d. Matrik Segitiga Atas: jika diatas diagonal utama, semua elemen bernilai nol

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

- e. Matriks Segitiga Bawah: jika dibawah diagonal utama semua elemen bernilai nol

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Persamaan linier biasanya berbentuk:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Persamaan diatas bisa ditulis dalam bentuk matrik sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ b_n \end{Bmatrix}$$

Atau dalam bentuk yang lebih kompak:

$$[A] \{X\} = \{B\}$$

3.2. Metode Eliminasi Gauss

Dalam metode Eliminasi Gauss, persamaan $[A]\{X\}=\{B\}$ dicari penyelesaiannya.

Konsepnya:

“Bagaimana mengubah matrik [A] menjadi matrik segitiga bawah”

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ b_n \end{Bmatrix}$$

dirubah bentuknya menjadi:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdot & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2^* \\ b_3^* \\ \cdot \\ b_n^* \end{Bmatrix}$$

Penyelesaian selanjutnya dengan melakukan back solving, mulai dari baris paling bawah dilanjutkan dengan baris diatasnya..

$x_n = b_n^* / a_{nn}$ dilanjutkan ke bagian atasnya, sampai ketemu nilai x_1 .

Contoh:

Tentukan penyelesaian persamaan dibawah ini:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$3x_1 + 4x_2 = 3$$

$$2x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 10$$

Jawab.

Persamaan diatas diubah ke dalam bentuk matrik:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 10 \end{Bmatrix} \quad (*)$$

Langkah 1: Buat nilai 3 pada baris dua menjadi nilai 0

Dengan operasi **baris 2 - 3 baris 1** atau **$b_2 - 3b_1$** , hanya berlaku untuk semua elemen baris 2 sehingga persamaan (*) menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 2 & 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -6 \\ 10 \end{Bmatrix} \quad (**)$$

Langkah 2: Buat nilai 2 pada baris tiga menjadi nilai 0

Dengan operasi **$b_3 - 2b_1$** , berlaku untuk semua baris 3, sehingga persamaan (**) menjadi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \end{Bmatrix} \quad (***)$$

Langkah 3: Buat nilai 6 pada baris tiga menjadi nilai 0

Dengan operasi $\underline{b_3 + 3b_2}$, berlaku untuk semua baris 3, sehingga persamaan (**) menjadi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -6 \\ -14 \end{Bmatrix} \quad (****)$$

Persamaan (****) sudah terbentuk matrik segitiga bawah, sehingga dapat dilakukan back solving:

$$\begin{aligned} -7x_3 &= -14 && ; x_3 = -14/-7 = 2 && ; x_3 = 2 \\ -2x_2 - 3x_3 &= -6 && ; -2x_2 = -6 + 3x_3 = -6 + 6 = 0 && ; x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 && ; x_1 = 3 - 2x_2 - x_3 = 3 - 2(0) - (2) = 1 && ; x_1 = 1 \end{aligned}$$

Jadi penyelesaian persamaan diatas adalah:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

3.3. Metode Gauss Jordan

Dalam metode Gauss Jordan, persamaan $[A] \{X\} = \{B\}$ dicari penyelesaiannya.

Konsepnya:

“Bagaimana mengubah matrik [A] menjadi matrikdiagonal”

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ b_n \end{Bmatrix}$$

dirubah bentuknya menjadi:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^* & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & a_{22}^* & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^* & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & a_{nn}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ b_3^* \\ \cdot \\ b_n^* \end{Bmatrix}$$

Sehingga hasilnya dapat ditulis dalam bentuk:

$$x_1 = b_1^* / a_{11}^*$$

$$x_2 = b_2^* / a_{22}^*$$

$$x_3 = b_3^* / a_{33}^*$$

$$x_n = b_n^* / a_{nn}^*$$

Contoh 1.

Tentukan penyelesaian persamaan dibawah ini:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$3x_1 + 4x_2 = 3$$

$$2x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 10$$

Jawab:

Penyelesaian tahap pertama sama dengan penyelesaian gauss sampai terbentuk segitiga bawah, setelah itu dilanjutkan dengan membuat segitiga atas, sampai diperoleh matrik diagonal.

3.4. Metode Jacobi

Metode Jacobi dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan linier maupun persamaan non linier. Penyelesaian dengan metode Jacobi menggunakan cara iterasi

Bentuk persamaan berikut:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Konsep Metode Jacobi: “ Ubah persamaan diatas sehingga x_1, x_2, x_3 berada disisi kiri persamaan “ sehingga menjadi bentuk:

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n) / a_{11}$$

$$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n) / a_{22}$$

$$x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - \dots - a_{3n}x_n) / a_{33}$$

.

$$x_n = (b_n - a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn-1}x_{n-1}) / a_{nn}$$

Langkah-langkah penyelesaian:

1. Tetapkan nilai awal untuk masing-masing nilai x_1, x_2, x_3, x_n yang terletak disebelah kanan persamaan dengan notasi $x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_n^0$ selanjutnya dilakukan iterasi sehingga diperoleh nilai $x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_n^1$

$$x_1^1 = (b_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0 - \dots - a_{1n}x_n^0) / a_{11}$$

$$x_2^1 = (b_2 - a_{21}x_1^0 - a_{23}x_3^0 - \dots - a_{2n}x_n^0) / a_{22}$$

$$x_3^1 = (b_3 - a_{31}x_1^0 - a_{32}x_2^0 - \dots - a_{3n}x_n^0) / a_{33}$$

.

$$x_n^1 = (b_n - a_{n1}x_1^0 + a_{n2}x_2^0 + \dots + a_{nn-1}x_{n-1}^0) / a_{nn}$$

2. Hitung error $\varepsilon_{x_1^1}, \varepsilon_{x_2^1}, \varepsilon_{x_3^1}, \varepsilon_{x_n^1}$

$$\varepsilon_x = \frac{x^1 - x^0}{x^1} \cdot 100\%$$

3. Kalau $\varepsilon_{x_1^1}, \varepsilon_{x_2^1}, \varepsilon_{x_3^1}, \varepsilon_{x_n^1} \leq \varepsilon$, maka iterasi berhenti dengan $x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_n^1$ merupakan penyelesaian persamaan. Sedangkan kalau $\varepsilon_{x_1^1}, \varepsilon_{x_2^1}, \varepsilon_{x_3^1}, \varepsilon_{x_n^1} > \varepsilon$ maka iterasi berlanjut ke iterasi kedua dengan menghitung $x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_n^2$

$$x_1^2 = (b_1 - a_{12}x_2^1 - a_{13}x_3^1 - \dots - a_{1n}x_n^1) / a_{11}$$

$$x_2^2 = (b_2 - a_{21}x_1^1 - a_{23}x_3^1 - \dots - a_{2n}x_n^1) / a_{22}$$

$$x_3^2 = (b_3 - a_{31}x_1^1 - a_{32}x_2^1 - \dots - a_{3n}x_n^1) / a_{33}$$

.

$$x_n^2 = (b_n - a_{n1}x_1^1 + a_{n2}x_2^1 + \dots + a_{nn-1}x_{n-1}^1) / a_{nn}$$

1. Hitung error $\varepsilon_{x_1^2}, \varepsilon_{x_2^2}, \varepsilon_{x_3^2}, \varepsilon_{x_n^2}$

$$\varepsilon_x = \frac{x^1 - x^0}{x^1} \cdot 100\%$$

2. Kalau $\varepsilon x_1^2, \varepsilon x_2^2, \varepsilon x_3^2, \varepsilon x_n^2 \leq \varepsilon$, maka iterasi berhenti dengan $x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_n^2$ merupakan penyelesaian persamaan. Sedangkan kalau $\varepsilon x_1^2, \varepsilon x_2^2, \varepsilon x_3^2, \varepsilon x_n^2 > \varepsilon$ maka iterasi berlanjut ke iterasi kedua dengan menghitung $x_1^3, x_2^3, x_3^3, x_n^3$
3. Iterasi terus berlanjut sampai diperoleh kondisi $\varepsilon x_1^n, \varepsilon x_2^n, \varepsilon x_3^n, \varepsilon x_n^n \leq \varepsilon$, dengan $x_1^n, x_2^n, x_3^n, x_n^n$ merupakan penyelesaian persamaan.

Contoh 2.

$$3x + y - z = 5$$

$$4x + 7y - 3z = 20$$

$$2x - 2y + 5z = 10$$

Cek dengan $\varepsilon = 0,0001$

Jawab:

Persamaan diatas diubah bentuknya menjadi:

$$x = (5 - y + z)/3$$

$$y = (20 - 4x + 3z)/7$$

$$z = (10 - 2x + 2y)/5$$

Selanjutnya dilakukan iterasi pertama dengan memasukkan nilai awal $x^0, y^0, z^0 = 0$, sehingga iterasinya menjadi:

$$x^1 = (5 - y^0 + z^0)/3 = 5/3 = 1,6666667$$

$$y^1 = (20 - 4x^0 + 3z^0)/7 = 20/7 = 2,857$$

$$z^1 = (10 - 2x^0 + 2y^0)/5 = 10/5 = 2$$

Hitung error $\varepsilon x^1, \varepsilon y^1, \varepsilon z^1$,

$$\varepsilon_x = \frac{x^1 - x^0}{x^1} \cdot 100\%$$

sehingga diperoleh $\varepsilon x^1 = 100\%$, $\varepsilon y^1 = 100\%$, $\varepsilon z^1 = 100\%$. Karena $\varepsilon x^1, \varepsilon y^1, \varepsilon z^1 > \varepsilon$ maka iterasi berlanjut dengan memasukkan nilai x^1, y^1, z^1 ke iterasi kedua sehingga diperoleh nilai:

$$x^2 = (5 - y^1 + z^1)/3 = 1,38095, \text{ dengan } \varepsilon x^2 = 20,69\%$$

$$y^2 = (20 - 4x^1 + 3z^1)/7 = 2,76190, \text{ dengan } \varepsilon y^2 = 3,45\%$$

$$z^2 = (10 - 2x^1 + 2y^1)/5 = 2,47619, \text{ dengan } \varepsilon z^2 = 19,23\%$$

Ternyata pada iterasi kedua $\epsilon x^2, \epsilon y^2, \epsilon z^2, > \epsilon$ sehingga iterasi berlanjut ke iterasi selanjutnya sampai diperoleh kondisi $\epsilon x^2, \epsilon y^2, \epsilon z^2, \leq \epsilon$

Proses iterasi diatas dapat ditampilkan dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Iterasi	X	y	z	ϵx (%)	ϵy (%)	ϵz (%)
1	0	0	0	-	-	-
2	1,6667	2,8571	2	100	100	100
3	1,38095	2,7619	2,476	20,69	3,45	19,23
4	1,5714	3,1290	2,55	12,12	11,74	2,99
5	1,4743	3,0530	2,623	6,58	2,50	2,7
.						

3.5. Metode Gauss Seidel

Metode Gauss Seidel merupakan perbaikan dari metode Jacobi. Bentuk persamaan yang dapat diselesaikan:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3$$

$$\dots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Konsep Metode Gauss Seidel: “ Ubah persamaan diatas sehingga x_1, x_2, x_3 berada disisi kiri persamaan “ sehingga menjadi bentuk iterasi:

$$x_1^{n+1} = (b_1 - a_{12}x_2^n - a_{13}x_3^n - \dots - a_{1n}x_n^n) / a_{11} \quad (1)$$

$$x_2^{n+1} = (b_2 - a_{21}x_1^{n+1} - a_{23}x_3^n - \dots - a_{2n}x_n^n) / a_{22} \quad (2)$$

$$x_3^{n+1} = (b_3 - a_{31}x_1^{n+1} - a_{32}x_2^{n+1} - \dots - a_{3n}x_n^n) / a_{33} \quad (3)$$

$$\dots$$

$$x_n^{n+1} = (b_n - a_{n1}x_1^{n+1} + a_{n2}x_2^{n+1} + \dots + a_{nn-1}x_{n-1}^{n+1}) / a_{nn} \quad (n)$$

Langkah-langkah penyelesaian:

1. Tentukan nilai awal $x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0$ selanjutnya dilakukan iterasi seperti persamaan (1) sehingga diperoleh nilai $x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_n^1$

Masukkan nilai $x_1^1, x_3^0, \dots, x_n^0$ ke persamaan (2) sehingga diperoleh nilai x_2^1

Masukkan nilai $x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1$ ke persamaan (3) sehingga diperoleh nilai x_3^1

- Demikian seterusnya sampai didapatkan nilai x_n^1
- Hitung error $\varepsilon_{x_1^1}, \varepsilon_{x_2^1}, \varepsilon_{x_3^1}, \dots, \varepsilon_{x_n^1}$

$$\varepsilon_x = \frac{x' - x^0}{x'} \cdot 100\%$$

- Kalau $\varepsilon_{x_1^1}, \varepsilon_{x_2^1}, \varepsilon_{x_3^1}, \varepsilon_{x_n^1} \leq \varepsilon$, maka iterasi berhenti dengan $x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_n^1$ merupakan penyelesaian persamaan. Sedangkan kalau $\varepsilon_{x_1^2}, \varepsilon_{x_2^2}, \varepsilon_{x_3^2}, \varepsilon_{x_n^2} > \varepsilon$ maka iterasi berlanjut ke iterasi kedua dengan menghitung $x_1^3, x_2^3, x_3^3, x_n^3$
- Iterasi terus berlanjut sampai diperoleh kondisi $\varepsilon_{x_1^n}, \varepsilon_{x_2^n}, \varepsilon_{x_3^n}, \varepsilon_{x_n^n} \leq \varepsilon$, dengan $x_1^n, x_2^n, x_3^n, x_n^n$ merupakan penyelesaian persamaan.

Contoh 3.

$$3x + y - z = 5$$

$$4x + 7y - 3z = 20$$

$$2x - 2y + 5z = 10$$

Cek dengan $\varepsilon = 0,0001$

Jawab:

Persamaan diatas diubah bentuknya menjadi:

$$x = (5 - y + z)/3$$

$$y = (20 - 4x + 3z)/7$$

$$z = (10 - 2x + 2y)/5$$

Selanjutnya dilakukan iterasi pertama dengan memasukkan nilai awal $y^0, z^0 = 0$, sehingga iterasinya menjadi:

$$x^1 = (5 - y^0 + z^0)/3 = (5 - 0 - 0)/3 = 1,6666667$$

$$y^1 = (20 - 4x^1 + 3z^0)/7 = (20 - 4(1,66667) + 3(0))/7 = 1,90476$$

$$z^1 = (10 - 2x^1 + 2y^1)/5 = (10 - 2(1,66667) + 2(1,90476))/5 = 2,09524$$

Hitung error $\varepsilon_{x^1}, \varepsilon_{y^1}, \varepsilon_{z^1}$,

$$\varepsilon_x = \frac{x' - x^0}{x'} \cdot 100\%$$

sehingga diperoleh $\epsilon x^1 = 100\%$, $\epsilon y^1 = 100\%$, $\epsilon z^1 = 100\%$. Karena $\epsilon x^1, \epsilon y^1, \epsilon z^1, > \epsilon$ maka iterasi berlanjut dengan memasukkan nilai x^1, y^1, z^1 ke iterasi kedua sehingga diperoleh nilai:

$$x^2 = (5 - y^1 + z^1)/3 = 1,73016, \text{ dengan } \epsilon x^2 = 3,67\%$$

$$y^2 = (20 - 4x^2 + 3z^1)/7 = 2,76644, \text{ dengan } \epsilon y^2 = 31,15\%$$

$$z^2 = (10 - 2x^2 + 2y^2)/5 = 2,41451, \text{ dengan } \epsilon z^2 = 13,22\%$$

Ternyata pada iterasi kedua $\epsilon x^2, \epsilon y^2, \epsilon z^2, > \epsilon$ sehingga iterasi berlanjut ke iterasi selanjutnya sampai diperoleh kondisi $\epsilon x^2, \epsilon y^2, \epsilon z^2, \leq \epsilon$

Proses iterasi diatas dapat ditampilkan dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Iterasi	X	y	z	ϵx (%)	ϵy (%)	ϵz (%)
1	0	0	0	-	-	-
2	1,6667	1,90476	2,09524	100	100	100
3	1,73016	2,76644	2,41451	3,67	31,15	13,22
4	1,54936	3,00658	2,58289	11,67	7,99	6,52
5	1,52544	3,09242	2,62679	1,57	2,78	1,67
6	1,51146	3,11922	2,64310	0,9	0,86	0,62

3.6. Soal-soal Latihan.

1. $4x - 3y + z = 11$

$$2x + y - 4z = -1$$

$$x + 2y - 2z = 1$$

2. $x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 8$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 5$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 5$$

3. $x + 3y + 6z = 17$

$$2x + 8y + 16z = 42$$

$$5x + 21y - 45z = 91$$

Selesaikan persamaan-persamaan diatas dengan menggunakan metode yang ada.

BAB IV

PERSAMAAN NON LINIER SIMULTAN

Ada dua cara penyelesaian persamaan non linier simultan yaitu:

1. Direct Iteration
2. Newton Iteration

4.1. Direct Iteration

Penyelesaian Direct Iteration sama dengan penyelesaian Gauss Seidel, yaitu dengan mengubah fungsi $f(x) = 0$ menjadi fungsi $x = g(x)$.

$$f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \text{ diubah menjadi } x_1^* = g_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \text{ diubah menjadi } x_2^* = g_2(x_1^*, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \text{ diubah menjadi } x_3^* = g_3(x_1^*, x_2^*, x_3, \dots, x_n)$$

$$f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \text{ diubah menjadi } x_n^* = g_n(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n)$$

Langkah-langkah penyelesaian:

1. Tentukan harga awal $x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0$
2. Lakukan iterasi langsung sesuai cara Gauss Seidel.
3. Cek apakah $|x^{n+1} - x^n| \leq \epsilon$

4.2. Newton Iteration

Sifat dari Newton Iteration:

1. Konvergensi lebih cepat.
2. Berbasis pada deret Taylor.

Deret Taylor:

$$f_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \Delta x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial f_1}{\partial x_n}$$

$$f_2(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \Delta x_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial f_2}{\partial x_n}$$

$$f_n(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \dots, x_n+\Delta x_n) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + \Delta x_1 \frac{\partial f_n}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial f_n}{\partial x_2} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \dots\dots\dots (4.1)$$

Jika ; $x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \dots, x_n+\Delta x_n$, merupakan penyelesaian yang dicari maka:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Sehingga persamaan (4.1) menjadi:

$$\begin{aligned} -f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \Delta x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ -f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \Delta x_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \dots\dots\dots (4.2) \\ -f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \Delta x_1 \frac{\partial f_n}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial f_n}{\partial x_2} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{aligned}$$

Persamaan (4.2) kalau dituliskan dalam bentuk matrik:

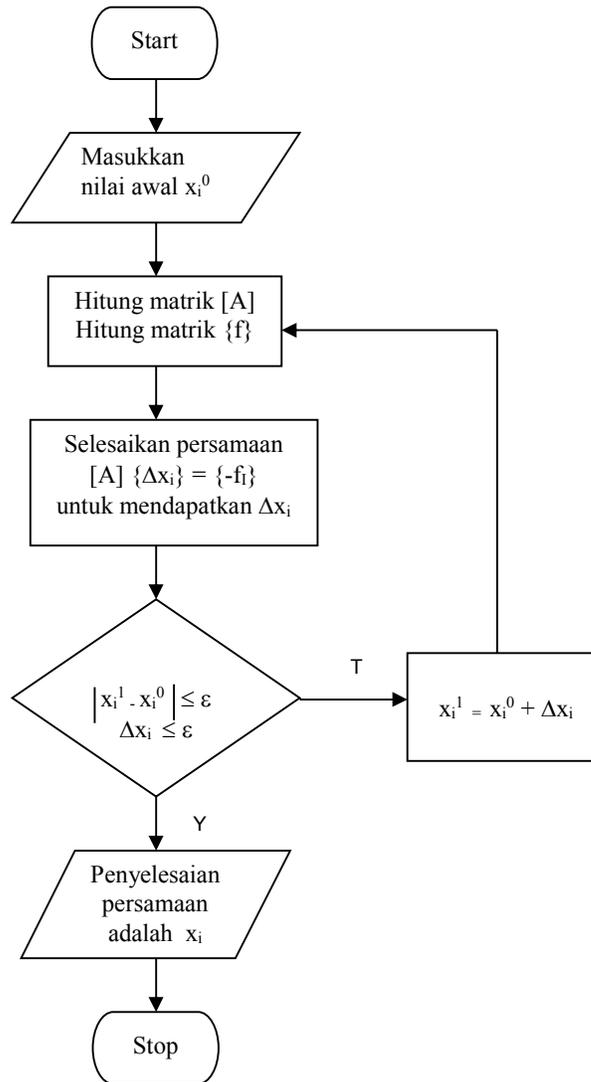
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \dots \\ \Delta x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ \dots \\ -f_n \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (4.3)$$

atau dalam bentuk yang lebih kompak:

$$[A] \{\Delta X\} = \{f\}$$

Variabel yang dicari penyelesaiannya dengan persamaan (4.3) adalah $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ dengan cara eliminasi maupun iterasi.

Flowchart Newton Iteration:



Gambar 4.1
Flowchart Newton Iteration

Langkah-langkah penyelesaian:

1. Tentukan nilai awal dari $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$
2. Hitung elemen-elemen matrik [A] dan matrik {f}

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

$$f_1 = f_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

$$f_2 = f_2(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

$$f_n = f_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

3. Hitung $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ dengan $[A] \{\Delta X\} = \{-f\}$

4. Hitung harga $x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1$

$$x_1^1 = x_1 + \Delta x_1$$

$$x_2^1 = x_2 + \Delta x_2$$

$$x_n^1 = x_n + \Delta x_n$$

5. Cek apakah $|x_i^1 - x_i^0| \leq \varepsilon$

Kalau ya, maka persamaan diselesaikan.

Kalau tidak, iterasi berlanjut dengan memasukkan x_i^1 ke langkah no 2.

Demikian seterusnya sampai tercapai kondisi $|x_i^1 - x_i^0| \leq \varepsilon$

Contoh 1.

$$x_1 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 + 2 = 0$$

$$x_1^2 + x_2 x_3^2 + x_2^2 + 3 = 0$$

$$x_1 x_3 + x_2 x_3^2 + x_3^2 + 4 = 0$$

Tentukan x_1, x_2, x_3 dengan $\varepsilon = 0,0001$

Jawab:

1. Tentukan harga awal (sembarang)

$$x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 1$$

2. Tentukan harga f_1, f_2, f_3

$$f_1 = x_1 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 + 2 = 1 + 1 + 1 + 2 = 5$$

$$f_2 = x_1^2 + x_2 x_3^2 + x_2^2 + 3 = 1 + 1 + 1 + 3 = 6$$

$$f_3 = x_1 x_3 + x_2 x_3^2 + x_3^2 + 4 = 1 + 1 + 1 + 4 = 7$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = x_2 = 1 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = x_1 + 2 x_2 x_3 = 3 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = x_2^2 + 2 x_3 = 3$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 2x_1 = 2 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = x_3^2 + 2 x_2 = 3 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 2 x_2 x_3 = 2$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = x_3 = 1 \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = x_3^2 = 1 \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = x_1 + 2x_2 x_3 + 2x_3 = 5$$

3. Dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5 \\ -6 \\ -7 \end{Bmatrix}$$

Persamaan diatas dapat diselesaikan dengan cara eliminasi Gauss maupun iterasi sehingga diperoleh:

$$\Delta x_1 = -2, \Delta x_2 = 0, \Delta x_3 = -1$$

4. Dicek

$$|\Delta x_1| = 2 > \varepsilon$$

$$|\Delta x_2| = 0 < \varepsilon$$

$$|\Delta x_3| = 1 > \varepsilon$$

Sehingga proses berlanjut dengan:

$$x_1^1 = x_1^0 + \Delta x_1 = 1 - 2 = -1$$

$$x_2^1 = x_2^0 + \Delta x_2 = 1 + 0 = 1$$

$$x_3^1 = x_3^0 + \Delta x_3 = 1 - 1 = 0$$

5. Lanjutkan ke langkah no 2 dan seterusnya sampai didapatkan kondisi

$$|x_i^1 - x_i^0| \leq \varepsilon$$

Latihan soal:

1. $x_1 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 + 2 = 0$

$$x_1^2 + x_2 x_3^2 + 3 = 0$$

$$x_1 x_3 + x_2 x^2 + x_3^2 + 4 = 0$$

Tentukan x_1, x_2, x_3 dengan $\varepsilon = 0,0001$

2. $x_1 + x_2^2 x_3 + x_1 x_3^2 + 6 = 0$

$$x_1^2 + x_2 x_3^2 + x_2^2 + 4 = 0$$

$$x_1 x_3 + x_2^3 + x_3^2 + 5 = 0$$

Tentukan x_1, x_2, x_3 dengan $\varepsilon = 0,0001$

3. $x_1^3 + x_2^2 x_3 + x_3^2 + 1 = 0$

$$x_1^2 + x_2 x_3^2 + x_2^2 + 5 = 0$$

$$x_1 + x_2 x_3^2 + x_3^2 + 8 = 0$$

Tentukan x_1, x_2, x_3 dengan $\varepsilon = 0,0001$

4. $x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 x_3^2 + 4 = 0$

$$x_1^2 + x_2 x_3^2 + x_2^2 + 3 = 0$$

$$x_1 x_3 + x_2 x_3^2 + x_3^2 + 6 = 0$$

Tentukan x_1, x_2, x_3 dengan $\varepsilon = 0,0001$

5. $x_1 x_3 + x_2^2 + x_3^2 + 5 = 0$

$$x_1^2 + x_2 x_3^2 + x_3^2 + 6 = 0$$

$$x_1 x_3 + x_2 x_3^2 + x_3^2 + 7 = 0$$

Tentukan x_1, x_2, x_3 dengan $\varepsilon = 0,0001$

BAB V

REGRESI

5.1. Pendahuluan

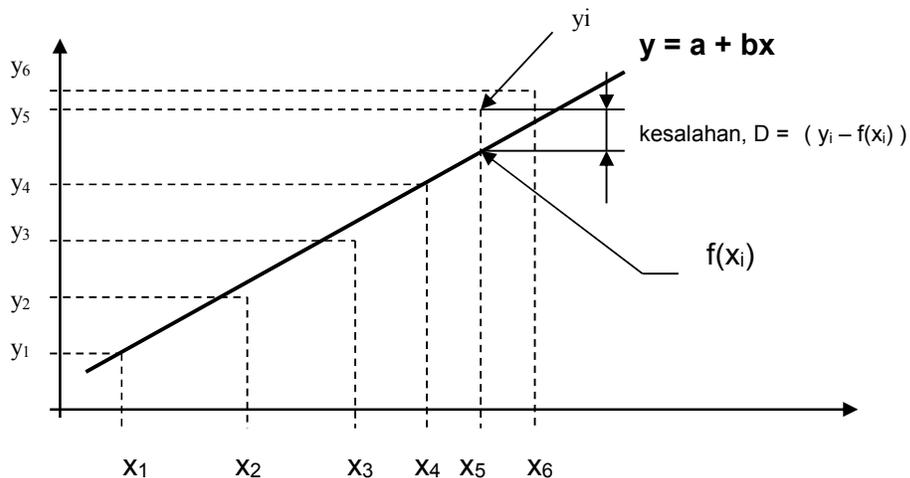
Analisis regresi/curva fitting digunakan untuk memprediksi/meramalkan suatu permasalahan . Pemakaian analisis regresi tidak terbatas pada ilmu teknik saja, tetapi dapat digunakan pada berbagai bidang ilmu, baik ilmu sosial maupun ilmu ekonomi. Contoh penggunaan regresi:

- dalam ilmu sosial : untuk memprediksi pertambahan penduduk per tahun
- dalam ilmu ekonomi: untuk menentukan pengaruh promosi terhadap penjualan
- dalam ilmu teknik : untuk menentukan pengaruh holding time dengan kekuatan material.

Bentuk-bentuk regresi/curva fitting:

- Linier : $y = a + bx$
- Non Linier : $y = a e^{bx}$, $y = a x^b$
- Polinomial : $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

5.2. Regresi Linier



Gambar 5.1
Regresi linier

Metode yang digunakan dalam regresi linier adalah **Metode Kwadrat Terkecil**. Tujuan dari metode ini adalah untuk membuat kesalahan yang terjadi sekecil mungkin, seperti terlihat dalam gambar 5.1. Caranya adalah dengan mengkwadratkan kesalahan (D^2), dimana;

$$D^2 = (y_1 - f(x_1))^2 + (y_2 - f(x_2))^2 + \dots + (y_n - f(x_n))^2$$

Dari bentuk regresi

$$Y = a + bx$$

a dan b harus dibuat sedemikian hingga agar D^2 menjadi minimum, sehingga:

$$\partial D^2 / \partial a = 0$$

$$\partial D^2 / \partial b = 0$$

sehingga:

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

Setelah didapat a dan b, lalu masukkan ke persamaan regresi $y = a + bx$

Untuk memprediksi apakah garis regresi yang kita buat sudah mempunyai kesalahan yang sekecil mungkin, maka perlu dihitung suatu koefisien yang dinamakan **koefisien korelasi (r)**.

Koefisien korelasi mempunyai harga dari 0 – 1. Semakin mendekati nilai 1 maka r nya semakin baik.

Rumus untuk menghitung r adalah:

$$r = \sqrt{\frac{Dt^2 - D^2}{Dt^2}}$$

dimana

$$Dt^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

$$D^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2$$

Contoh:

Tentukan persamaan garis yang mewakili data berikut ini:

x	4	6	8	10	14	16	20	22	24	28
y	30	18	22	28	14	22	16	8	20	8

Dengan menggunakan persamaan regresi $y = a + bx$,

Penyelesaiannya sebagai berikut:

No	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - a - bx_i)^2$
1	4	30	120	16	128,96	16,3434
2	6	18	108	36	0,36	44,136
3	8	22	176	64	11,56	1,7681
4	10	28	280	100	88,36	35,8
5	14	14	196	196	21,16	29,033
6	16	22	352	256	11,56	15,400
7	20	16	320	400	6,76	0,3059
8	22	8	176	484	112,36	37,61
9	24	20	480	576	1,96	51,56
10	28	8	224	784	112,36	4,803
	Σx_i	Σy_i	$\Sigma x_i y_i$	Σx_i^2	$\Sigma (y_i - \bar{y})^2$	$\Sigma (y_i - a - bx_i)^2$
	152	186	2432	2912	496,4	236,7535

Dari tabel diatas dapat ditentukan:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{152}{10} = 15,2$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{186}{10} = 18,6$$

Persamaan garis yang mewakili:

$$Y = a + bx$$

Dengan :

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{10(2432) - 152(186)}{10(2912) - (152)^2} = -0,6569$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 18,6 - (-0,6569)15,2 = 28,5849$$

Sehingga persamaan garisnya:

$$y = 28,5849 - 0,6569x$$

Nilai koefisien korelasinya:

$$Dt^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 496,4$$

$$D^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 = 236,7535$$

$$r = \sqrt{\frac{Dt^2 - D^2}{Dt^2}} = 0,7232$$

Dengan melihat nilai r diatas maka persamaan garis yang diperoleh dengan regresi linier belum memuaskan, sehingga perlu dicari dengan regresi non linier.

5.3. Regresi Non Linier

a. Fungsi Eksponensial

Bentuk umum regresi eksponensial:

$$y = a e^{bx} \quad (5.1)$$

Persamaan (5.1) diubah ke dalam bentuk ln.

$$\ln y = \ln a e^{bx}$$

$$\ln y = \ln a + bx \ln e \quad ; \ln e = 1$$

$$\ln y = \ln a + bx \quad (5.2)$$

Persamaan (5.2) dapat disederhanakan menjadi:

$$P = \ln y \quad q = x$$

$$A = \ln a \quad B = b$$

Sehingga persamaan (5.2) menjadi:

$$P = A + Bq \quad (5.3)$$

Persamaan (5.3) sudah merupakan bentuk regresi linier. Penyelesaiannya dapat menggunakan penyelesaian regresi linier, sehingga diperoleh nilai A dan B.

Setelah A dan B didapat, maka dilakukan proses inverse sehingga didapatkan nilai a dan b.

$$A = \ln a \longrightarrow a = e^A$$

$$B = b \longrightarrow b = B$$

Langkah selanjutnya adalah memasukkan nilai a dan b ke persamaan (5.1), sehingga diperoleh $y = a e^{bx}$.

Perhitungan koefisien korelasi r:

$$Dt^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

$$D^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ae^{bx_i})^2$$

$$r = \sqrt{\frac{Dt^2 - D^2}{Dt^2}}$$

Contoh regresi fungsional:

Tentukan persamaan untuk data-data dibawah ini.

x	1	2	3	4	5
y	0,5	1,7	3,4	5,7	8,4

Jawab:

no	$x_i = q_i$	y_i	q_i^2	$p_i = \ln y_i$	$p_i q_i$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - ae^{bx_i})^2$
1	1	0,5	1	-0,6931	-0,6931	11,8336	-0,3314
2	2	1,7	4	0,5309	1,0612	5,0176	0,2073
3	3	3,4	9	1,2237	3,671	0,2916	0,7200
4	4	5,7	16	1,7404	6,9618	3,0976	0,8886
5	5	8,4	25	2,128	10,641	19,8916	-0,2381
Σ	15	19,7	55	4,9299	20,6419	40,1320	1,2464

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{19,7}{5} = 3,97$$

$$\bar{p} = \frac{\sum p_i}{n} = \frac{4,9299}{5} = 0,9859$$

$$\bar{q} = \frac{\sum q_i}{n} = \frac{15}{5} = 3$$

Koefisien A dan B dapat dihitung sebagai berikut:

$$B = \frac{n \sum p_i q_i - \sum p_i \sum q_i}{n \sum q_i^2 - (\sum q_i)^2} = \frac{5(20,6419) - 4,9299(15)}{5(55) - (15)^2} = 0,5852$$

$$A = \bar{p} - B\bar{q} = 0,9859 - 0,5852(3) = -0,7697$$

A dan B kemudian ditransformasikan:

$$a = e^A = e^{(-0,7697)} = 0,4631$$

$$b = B = 0,5852$$

Sehingga persamaan regresinya:

$$y = 0,4631 e^{0,5852 x}$$

Koefisien korelasi dapat dihitung sebagai berikut:

$$Dt^2 = \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 40,1320$$

$$D^2 = \sum_{i=1}^5 (y_i - ae^{bx_i})^2 = 1,2464$$

$$r = \sqrt{\frac{Dt^2 - D^2}{Dt^2}} = 0,9843 \text{ (baik)}$$

b. Persamaan Berpangkat

Bentuk umum:

$$y = a x^b \tag{5.4}$$

Persamaan (5.4) diubah ke dalam bentuk log.

$$\log y = \log a + b \log x \tag{5.5}$$

Persamaan (5.5) ditransformasikan menjadi:

$$P = \log y \quad B = b$$

$$A = \log a \quad q = \log x$$

Bentuk persamaan yang baru:

$$P = A + B q \tag{5.6}$$

Persamaan (5.6) sudah merupakan bentuk persamaan linier, yang kalau diselesaikan akan diperoleh nilai A dan B.

A dan B selanjutnya diinverse menjadi a dan b:

$$A = \log a \qquad a = 10^A$$

$$B = b \qquad b = B$$

Nilai a dan b kemudian dimasukkan ke persamaan (5.4) :

$$y = a x^b$$

Menentukan koefisien korelasi:

$$Dt^2 = \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2$$

$$D^2 = \sum_{i=1}^5 (y_i - ax_i^b)^2$$

$$r = \sqrt{\frac{Dt^2 - D^2}{Dt^2}}$$

Contoh:

Tentukan persamaan regresi berpangkat untuk data-data dibawah ini.

X	1	2	3	4	5
Y	0,5	1,7	3,4	5,7	8,4

Jawab:

n	x_i	y_i	$p_i = \log y_i$	$q_i = \log x$	q_i^2	$p_i q_i$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - ax_i^b)^2$
1	1	0,5	-0,3010	0	0	0	11,8336	0
2	2	1,7	0,2034	0,3010	0,0906	0,0693	5,0176	0,000177
3	3	3,4	0,5314	0,4771	0,2276	0,2535	0,2916	0,000988
4	4	5,7	0,7558	0,6020	0,3624	0,4549	3,0976	0,000415
5	5	8,4	0,9242	0,6989	0,4884	0,6459	19,8916	0,0000168
Σ	15	19,7	2,1408	2,0790	1,1690	1,4236	40,132	0,00159

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{p} = \frac{\sum p_i}{n} = \frac{4,9299}{5} = 0,9859$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{19,7}{5} = 3,94$$

$$\bar{q} = \frac{\sum q_i}{n} = \frac{2,079}{5} = 0,4158$$

Koefisien A dan B dapat dihitung sebagai berikut:

$$B = \frac{n \sum p_i q_i - \sum p_i \sum q_i}{n \sum q_i^2 - (\sum q_i)^2} = \frac{5(1,4236) - 2,1408(2,079)}{5(1,169) - (2,079)^2} = 1,7516$$

$$A = \bar{p} - B\bar{q} = 0,4281 - 1,7516(0,4158) = -0,3002$$

A dan B kemudian ditransformasikan:

$$a = 10^A = 10^{-0,3002} = 0,5009$$

$$b = B = 1,7516$$

Sehingga persamaan regresinya:

$$y = 0,5009 x^{1,7516}$$

Koefisien korelasi dapat dihitung sebagai berikut:

$$Dt^2 = \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 40,1320$$

$$D^2 = \sum_{i=1}^5 (y_i - ax^b)^2 = 0,00159$$

$$r = \sqrt{\frac{Dt^2 - D^2}{Dt^2}} = 0,99998 \text{ (sangat baik)}$$

5.4. Regresi Polinomial

Bentuk umum:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n \quad (5.7)$$

Persamaan errornya:

$$D^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x - a_2x^2 - \dots - a_nx^n)^2 \quad (5.8)$$

Nilai x dan y sudah diketahui dari data.

Yang perlu dicari adalah nilai $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, sedemikian rupa sehingga harga D^2 menjadi minimum.

Bentuk penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \dots & \sum x_i^{n+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \dots & \sum x_i^{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & \dots & \sum x_i^{n+n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \\ \dots \\ \sum x_i^n y_i \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

Persamaan (5.9) merupakan persamaan simultan yang dapat diselesaikan dengan Gauss Elimination, Gaus Jordan, Iterasi maupun yang lainnya. Yang didapat dari persamaan (5.9) adalah nilai dari $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$.

Selanjutnya masukkan $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ke persamaan (5.7).

Koefisien korelasi (r) dapat dihitung sebagai berikut:

$$Dt^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

$$D^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots - a_n x^n)^2$$

$$r = \sqrt{\frac{Dt^2 - D^2}{Dt^2}}$$

Notasi $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ menyatakan order polinomial yang akan dihitung.

Polinomial order 1 menghitung a sampai a_1

Polinomial order 2 menghitung a sampai a_2

Polinomial order 3 menghitung a sampai a_3

Demikian seterusnya.

Contoh

Selesaikan soal berikut dengan menggunakan polinomial order 2.

x	0	1	2	3	4	5
y	2,1	7,7	13,6	27,2	40,9	61,1

Jawab:

Karena yang diminta adalah polinomial order 2 maka bentuk persamaan:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Bentuk penyelesaiannya:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{Bmatrix}$$

Dalam bentuk tabel:

x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$\Sigma x_i^2 y_i$	$(y_i - \bar{y})$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)^2$
0	2,1	0	0	0	0	0	-23,33	544,28	0,23
1	7,7	1	1	1	7,7	7,7	-17,73	314,35	1
2	13,6	4	8	16	27,2	54,4	-11,83	139,94	0,922
3	27,2	9	27	81	81,6	244,8	1,77	3,13	1,082
4	40,9	16	64	256	163,6	654,4	15,47	239,32	0,36
5	61,1	25	125	625	305,5	1527,5	35,67	1272,34	0,27
Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ
15	152,6	55	225	979	585,6	2488,8		2513,36	3,864

Persamaan dalam bentuk matrik:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 152,6 \\ 585,6 \\ 2488,8 \end{Bmatrix}$$

Persamaan diatas kalau diselesaikan akan didapatkan nilai:

$$a_2 = 1,8794$$

$$a_1 = 2,25$$

$$a_0 = 2,58$$

Sehingga persamaan regresinya:

$$y = 2,58 + 2,25 x + 1,8794 x^2$$

Menentukan koefisien korelasi r:

$$Dt^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 2513,36$$

$$D^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x - a_2x^2 - \dots - a_nx^n)^2 = 3,864$$

$$r = \sqrt{\frac{Dt^2 - D^2}{Dt^2}} = 0,999 \text{ (baik sekali)}$$

5.5. Latihan Soal

1. Tentukan persamaan regresi dari soal berikut menggunakan metode yang ada

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0,5	0,8	1,2	1,9	3	4,8	7,5	11,9

2. Tentukan persamaan regresi dari soal berikut menggunakan metode yang ada

X	1	2	3	4	5	6
Y	3,13	3,76	6,94	12,62	20,86	31,33

3. Tentukan persamaan regresi dari soal berikut menggunakan metode yang ada

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	3,7950	3,2299	3,2532	3,2611	3,2516	3,2282

4. Tentukan persamaan regresi dari soal berikut menggunakan metode yang ada

x	10	15	22,5	33,7	50,65	75,9
y	0,3	0,675	1,519	3,417	7,689	17,3

5 Dalam data pada PT Sehat Selalu, biaya promosi untuk daerah Denpasar yang dikeluarkan untuk 20 minggu berturut-turut adalah sebagai berikut:

MINGGU KE	SALES (ratus ribu rupiah)	BIAYA PROMOSI (ratus ribu rupiah)
1	3589	300
2	3452	354
3	3569	365
4	3258	357
5	3156	450
6	3547	365

7	3556	375
8	3245	365
9	3159	413
10	3876	423
11	4200	432
12	4150	455
13	4210	435
14	3950	465
15	3850	366
16	3592	374
17	3678	321
18	3845	310
19	4015	320
20	4025	420

Dari data-data PT Sehat Selalu di daerah Denpasar tersebut, ingin diketahui korelasi antara biaya promosi dan penjualan.

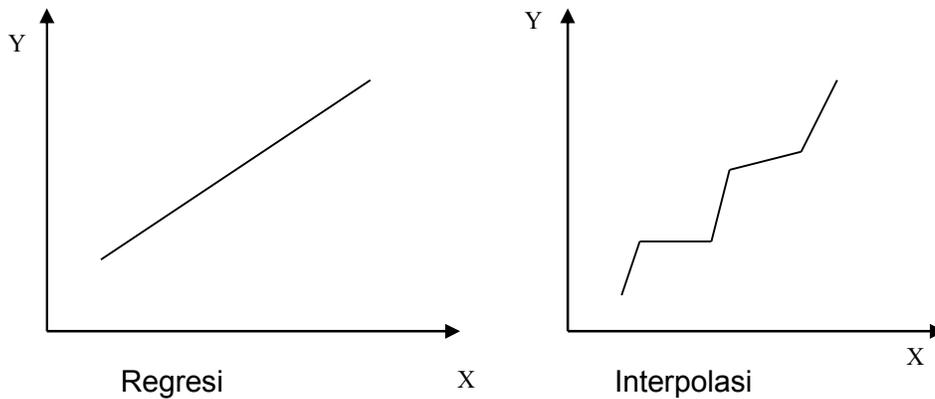
BAB VI INTERPOLASI

6.1. Pendahuluan

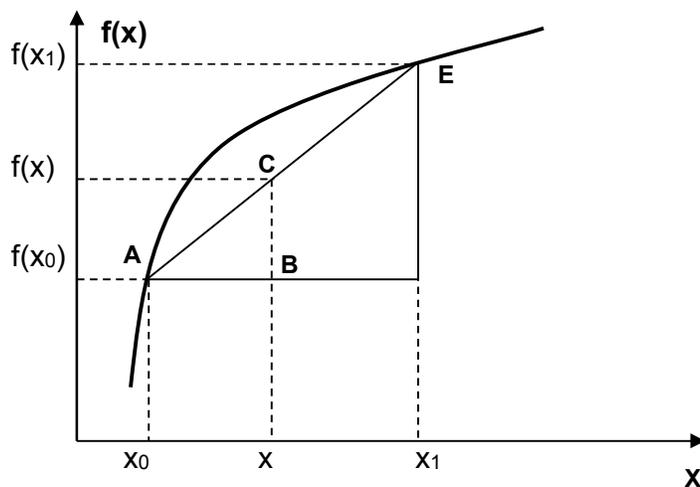
Interpolasi digunakan untuk mengestimasi suatu nilai diantara beberapa titik data yang telah diketahui.

Ada beberapa bentuk interpolasi yang sering digunakan antara lain:

1. Interpolasi Linier
2. Interpolasi Kwadrat/Polinomial
3. Interpolasi Lagrange



6.2. Interpolasi Linier



Gambar 6.1
Interpolasi linier

Diketahui nilai fungsi di titik x_0 dan x_1 , yaitu $f(x_0)$ dan $f(x_1)$. Dengan metode interpolasi linier akan dicari nilai fungsi $f_1(x)$ di titik x . Indeks 1 menunjukkan bahwa interpolasi dilakukan dengan interpolasi linier order 1.

Perhatikan dua segitiga ABC dan ADE pada gambar 6.1 diatas. Kedua segitiga tersebut adalah sebangun, sehingga:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD}$$

$$\frac{f_1(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

sehingga

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \quad (6.1)$$

Persamaan (6.1) diatas merupakan persamaan interpolasi linier order 1.

Contoh 1:

Tentukan nilai $\ln 2$ berdasarkan nilai $\ln 1 = 0$ dan $\ln 6 = 1,7917595$, dengan menggunakan interpolasi linier.

Jawab:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 && ; f(x_0) = 0 \\ x_1 &= 6 && ; f(x_1) = 1,7917595 \\ x &= 2 && ; f(x) = ? \end{aligned}$$

$$f_1(x = 2) = 0 + \frac{1,7917596 - 0}{6 - 1}(2 - 1) = 0,35835$$

Dengan interpolasi linier order 1 didapat nilai $\ln 2 = 0,35835$.

Sedangkan nilai eksak dari $\ln 2 = 0,6931718$

Sehingga kesalahan yang terjadi adalah:

$$\varepsilon = \frac{0,6931718 - 0,35835}{0,6931718} \cdot 100\% = 48\%$$

Kesalahan yang terjadi cukup besar. Sehingga perlu diambil range yang lebih kecil untuk mengurangi kesalahan yang terjadi.

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 && ; f(x_0) = 0 \\ x_1 &= 4 && ; f(x_1) = 1,3862944 \\ x &= 2 && ; f(x) = ? \end{aligned}$$

$$f_1(x = 2) = 0 + \frac{1,3862944 - 0}{4 - 1}(2 - 1) = 0,462098$$

Dengan interpolasi linier order 1 didapat nilai $\ln 2 = 0,462098$.

Sedangkan nilai eksak dari $\ln 2 = 0,6931718$

Sehingga kesalahan yang terjadi adalah:

$$\varepsilon = \frac{0,6931718 - 0,462098}{0,6931718} \cdot 100\% = 33,33\%$$

Untuk mendapatkan hasil yang lebih teliti berarti range yang digunakan harus lebih kecil lagi.

6.3. Interpolasi Kwadrat/Polinomial

Kesalahan yang besar pada interpolasi linier terjadi karena kurva yang lengkung didekati dengan garis lurus. Untuk mengatasinya digunakanlah garis lengkung untuk memperkirakannya.

Apabila terdapat tiga titik data, maka untuk memprediksi nilai suatu titik data digunakanlah polinomial order 2, yang berbentuk:

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) \quad (6.2)$$

dengan :

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Contoh 2:

Tentukan nilai $\ln 2$ berdasarkan nilai $\ln 1 = 0$, $\ln 4 = 1,3862944$, dan $\ln 6 = 1,7917595$, dengan menggunakan interpolasi kwadrat.

Jawab:

$$x_0 = 1 \quad ; f(x_0) = 0$$

$$x_1 = 4 \quad ; f(x_1) = 1,3862944$$

$$x_2 = 6 \quad ; f(x_2) = 1,7917595$$

$$x = 2 \quad ; f(x) = ?$$

Dengan menggunakan rumus persamaan (6.2) diperoleh:

$$b_0 = 0$$

$$b_1 = \frac{1,3862944 - 0}{4 - 1} = 0,46209813$$

$$b_2 = \frac{\frac{1,7917595 - 1,3862944}{6 - 4} - \frac{1,3862944 - 0}{4 - 1}}{6 - 1} = -0,051873116$$

Sehingga:

$$f_2(x = 2) = 0 = 0,46209813 (2 - 1) + (-0,051873116)(2 - 1)(2 - 4)$$

$$f_2(x = 2) = 0,56584436.$$

Sedangkan nilai eksak dari $\ln 2 = 0,6931718$

Sehingga kesalahan yang terjadi adalah:

$$\varepsilon = \frac{0,6931718 - 0,56584436}{0,6931718} \cdot 100\% = 18,4\%$$

Kesalahan yang terjadi lebih kecil dibandingkan dengan menggunakan interpolasi linier.

6.4. Bentuk Umum Interpolasi Polinomial

Prosedur seperti dijelaskan terdahulu dapat digunakan untuk membentuk polinomial order n dari n+1 titik data.

Bentuk umum polinomial order n adalah:

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + \dots + b_n (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \quad (6.3)$$

Seperti yang dilakukan dengan interpolasi linier dan kwadratm titik-titik data dapat digunakan untuk mengevaluasi koefisien b_0, b_1, \dots, b_n . Untuk polinomial order n, diperlukan n+1 titik data $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. Dengan menggunakan titik data tersebut, persamaan berikut digunakan untuk mengevaluasi koefisien.

$$b_0 = f(x_0) \quad (6.4)$$

$$b_1 = f(x_1, x_0) \quad (6.5)$$

$$b_2 = f(x_2, x_1, x_0) \quad (6.6)$$

$$b_n = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0) \quad (6.7)$$

Dengan definisi fungsi berkurung ([.....]) adalah pembagian beda hingga, misalnya pembagian beda hingga pertama adalah:

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \quad (6.8)$$

Pembagian beda hingga kedua adalah:

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k} \quad (6.9)$$

Pembagian beda hingga hingga ke n adalah:

$$f[x_i, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0]}{x_n - x_0} \quad (6.10)$$

Bentuk pembagian beda hingga tersebut dapat digunakan untuk mengevaluasi koefisien-koefisien dalam persamaan (6.4) sampai (6.7), yang kemudian disubstitusikan ke persamaan (6.3) untuk mendapatkan persamaan interpolasi polinomial.

$$f_n(x) = f(x_0) + f[x_1, x_0](x-x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x-x_0)(x-x_1) + \dots + f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \quad (6.11)$$

Contoh.3

Dalam contoh 2, titik data $x_0 = 1$, $x_1 = 4$ dan $x_2 = 6$ digunakan untuk mengestimasi $\ln 2$ dengan parabola. Sekarang dengan menambahkan titik ke 4 $x_3 = 5$, $f(x_3) = 1,6094379$, hitung $\ln 2$ dengan interpolasi polinomial order tiga.

Penyelesaian

Data yang diketahui :

$x_0 = 1$	$f(x_0) = 0$
$x_1 = 4$	$f(x_1) = 1,3862944$
$x_2 = 6$	$f(x_2) = 1,7917595$
$x_3 = 5$	$f(x_3) = 1,6094379$

Persamaan polinomial order tiga diperoleh dengan memasukkan nilai $n = 3$ ke dalam persamaan (6.3)

$$f_3(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + b_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

Pembagian beda hingga pertama dihitung dengan persamaan 6.8.

$$f[x_1, x_0] = \frac{1,3862944 - 0}{4 - 1} = 0,46209813$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{1,7917595 - 1,3862944}{6 - 4} = 0,20273255$$

$$f[x_3, x_2] = \frac{1.6094379 - 1.7917595}{5 - 6} = 0.18232160$$

Pembagian beda hingga kedua dihitung dengan persamaan (6.9);

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{0,20273255 - 0.46209813}{6 - 1} = -0,051873116$$

$$f[x_3, x_2, x_1] = \frac{0,18232160 - 0,20273255}{5 - 4} = -0,020410950$$

Pembagian beda hingga ketiga dihitung dengan persamaan 8.10;

$$f[x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{-0,02410950 - (-0.051873116)}{5 - 1} = 0,0078655415$$

Hasil dari $f[x_1, x_0]$, $f[x_2, x_1, x_0]$, $f[x_3, x_2, x_1, x_0]$, merupakan koefisien b_1 , b_2 , dan b_3 dari persamaan (6.3); dan dengan $b_0 = f(x_0) = 0$, maka persamaan (6.3) menjadi:

$$f_3(x) = 0 + 0,46209813(x-1) - 0,051873116(x-1)(x-4) + 0,0078655415(x-1)(x-4)(x-6)$$

yang akhirnya didapat:

$$f_3(2) = 0,62876869$$

Besarnya kesalahan dengan menggunakan interpolasi polinomial order 3 adalah 9,3%.

6.5. Interpolasi Lagrange

Persamaan Lagrange digunakan untuk memperbaiki dua metode sebelumnya. Dalam interpolasi Lagrange digunakan polinomial lagrange order n .

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^n L_i(x) \cdot f(x_i)$$

Dengan

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Contoh :

Untuk lagrange order 3 :

maka

$$f_3(x) = \sum_{i=0}^3 L_i(x) \cdot f(x_i)$$

$$= L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2) + L_3(x) f(x_3)$$

dengan :

$$L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_0-x_2} \cdot \frac{x-x_3}{x_0-x_3}$$

$$L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \cdot \frac{x-x_3}{x_1-x_3}$$

$$L_2(x) = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \cdot \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \cdot \frac{x-x_3}{x_2-x_3}$$

$$L_3(x) = \frac{x-x_0}{x_3-x_0} \cdot \frac{x-x_1}{x_3-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_3-x_2}$$

Contoh 3:

Tentukan nilai $\ln 2$ berdasarkan nilai $\ln 1 = 0$, $\ln 4 = 1,3862944$,
dan $\ln 6 = 1,7917595$, dengan menggunakan interpolasi Lagrange.

Jawab:

$$x_0 = 1 \quad ; f(x_0) = 0$$

$$x_1 = 4 \quad ; f(x_1) = 1,3862944$$

$$x_2 = 6 \quad ; f(x_2) = 1,7917595$$

$$x = 2 \quad ; f(x) = ?$$

Persamaan interpolasi Lagrange-nya:

$$f_2(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2)$$

Dimana;

$$L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_0-x_2} = \frac{2-4}{1-4} \cdot \frac{2-6}{1-6} = 0,8$$

$$L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{2-1}{4-1} \cdot \frac{2-6}{4-6} = 0,66667$$

$$L_2(x) = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \cdot \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{2-1}{6-1} \cdot \frac{2-4}{6-4} = -0,2$$

Sehingga:

$$f_2(x) = 0,8 (0) + 0,66667 (1,3862944) + (-2) (-0,2) = 0,565844$$

Besar kesalahan yang terjadi:

$$\varepsilon = \frac{0,6931718 - 0,56584436}{0,6931718} \cdot 100\% = 18,4\%$$

6.6. Soal-soal latihan.

1. Tentukan nilai y untuk $x = 2,4$

x	2	4	6	8	10
y	9,68	10,96	12,32	13,76	15,28

2. Tentukan nilai y untuk $x = 1$

x	0,1	0,6	1,1	1,6	2,1
e^x	1,1052	1,8221	3,0042	4,9530	8,1662

3. Tentukan nilai y untuk $x = 97,66$

x	93	96,2	100	104,2	108,7
y	11,38	12,80	14,70	17,07	19,91

4. Tentukan nilai p pada $T = 372,1$

T	361	367	378	387	399
p	154,9	167	191	212,5	244,2

Selesaikan soal diatas dengan metode yang telah anda pelajari.

BAB VII

INTEGRASI NUMERIK

.....

Bentuk umum integral adalah:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Merupakan integral suatu fungsi $f(x)$ terhadap variabel x yang dihitung antara batas

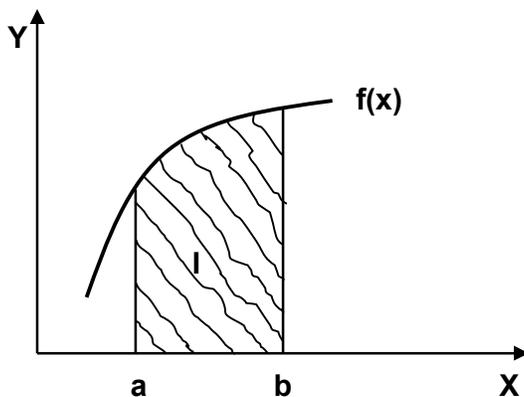
$x = a$ sampai $x = b$.

Integrasi numerik dilakukan apabila:

1. Integral sukar diselesaikan secara analitis.
2. Fungsi yang diintegalkan tidak diberikan dalam bentuk analitis, tetapi dalam bentuk angka dalam tabel.

Metode integrasi numerik merupakan integral tertentu yang didasarkan pada hitungan perkiraan, sehingga hasil yang diperoleh tidak sama persis dengan penyelesaian eksaknya. Hitungan dilakukan dengan membagi luasan dalam sejumlah pias kecil. Luas total adalah jumlah dari luas semua pias.

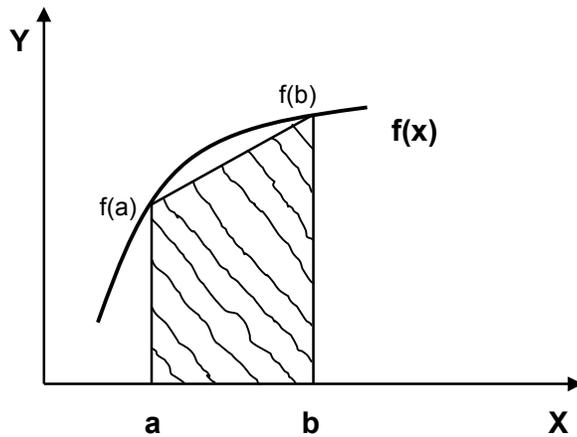
Penggambaran secara grafis:



Gambar 7.1
Integral suatu fungsi

I = luasan yang diarsir atau luasan yang dibatasi oleh fungsi $f(x)$ dan sumbu x serta antara batas $x = a$ dan $x = b$.

7.1. Metode Trapesium Satu Pias



Gambar 7.2
Metode Trapesium

Dari gambar diatas dapat dijelaskan bahwa:

Penghitungan luasan dibawah kurva didekati dengan luasan trapesium (bagian yang diarsir)

Luas trapesium = lebar x (jumlah garis sejajar)/2

$$I = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

(7.1)

Contoh1.

Tentukan integral berikut dengan menggunakan metode trapesium, dan berapa kesalahan yang terjadi dibandingkan dengan penyelesaian eksaknya ;

$$I = \int_0^4 e^x dx$$

Penyelesaian eksak $I = e^4 - e^0 = 53,598$

Penyelesaian dengan metode trapesium:

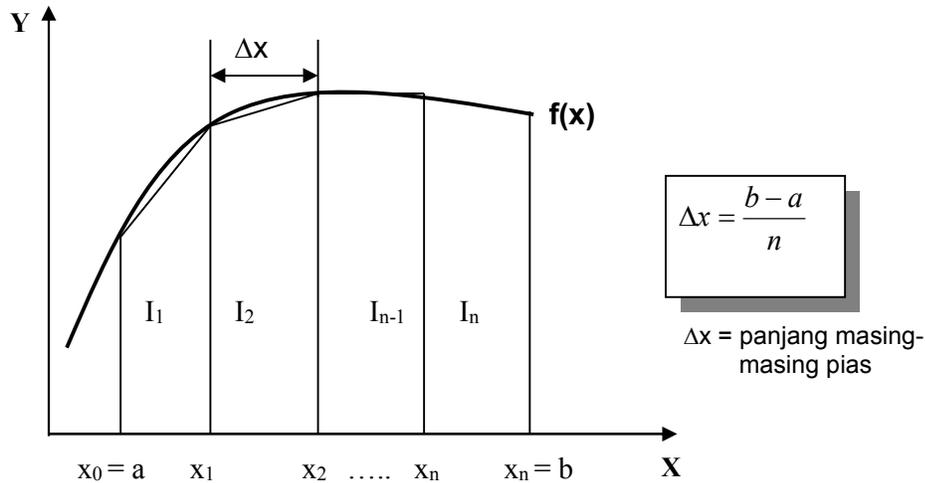
$$I = (4 - 0) \frac{e^4 + e^0}{2} = 111,196$$

Sehingga kesalahan yang terjadi:

$$\varepsilon = \frac{53,598 - 111,196}{53,98} \cdot 100\% = -107,46\%$$

7.2. Metode Trapesium Banyak Pias

Dari contoh diatas terlihat bahwa dengan menggunakan satu pias, kesalahan yang terjadi sangat besar. Untuk mengurangi kesalahan yang terjadi maka kurva fungsi yang lengkung didekati dengan sejumlah garis lurus sehingga berbentuk banyak pias, dengan panjang pias Δx seperti terlihat pada gambar 7.3. Semakin kecil pias yang digunakan maka hasilnya akan semakin teliti



Gambar 7.3.
Metode trapesium banyak pias

Batas pias diberi notasi :

$$x_0 = a, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n = b$$

Integrasi total :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$$

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$I = \Delta x \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \Delta x \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + \Delta x \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}$$

$$I = \frac{\Delta x}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$I = \frac{\Delta x}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] \quad (7.2)$$

Contoh 2:

Tentukan integral berikut dengan menggunakan metode trapesium empat pias dengan lebar pias $\Delta x = 1$, dan berapa kesalahan yang terjadi dibandingkan dengan penyelesaian eksaknya ;

$$I = \int_0^4 e^x dx$$

Penyelesaian eksak $I = e^4 - e^0 = 53,598$

Penyelesaian dengan metode trapesium banyak pias, menggunakan persamaan (7.2):

$$I = \frac{1}{2} (e^0 + e^1 + e^2 + e^3 + e^4) = 57,5991950$$

Sehingga kesalahan yang terjadi:

$$\varepsilon = \frac{53,598 - 57,599}{53,598} \cdot 100\% = -8,2\%$$

Contoh 3.

Diberikan data dalam bentuk tabel:

x	0	1	2	3	4
f(x)	1	3	9	19	33

Hitung luasan dibawah fungsi f(x) dan diantara x = 0 dan x = 4

Jawab:

Dengan menggunakan persamaan (7.2);

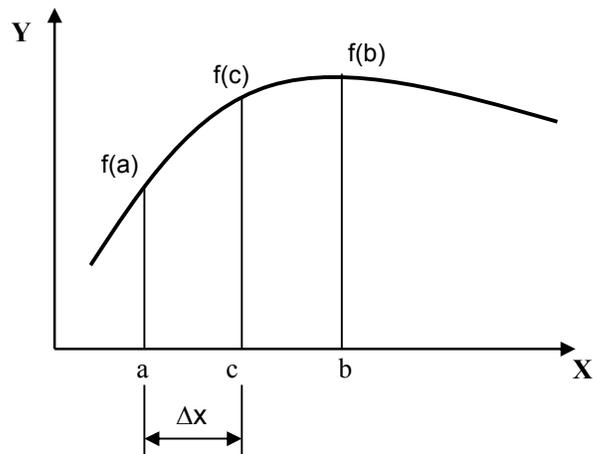
$$\Delta x = (4-0)/4 = 1$$

$$I = \frac{1}{2} [1 + 33 + 2(3 + 9 + 19)] = 48.$$

7.3. Metode Simpson 1/3 Satu Pias

Disamping menggunakan metode trapesium dengan interval yang lebih kecil, cara lain yang dapat digunakan untuk memperoleh hasil yang lebih teliti adalah menggunakan polinomial dengan order yang lebih tinggi untuk menghubungkan titik-titik.

Metode Simpson 1/3 menggunakan polinomial order 2 dengan 3 titik untuk mendekati fungsi, yaitu di f(a), f(b), f(c). Rumus Simpson 1/3 dapat diturunkan berdasarkan deret Taylor.



Gambar 7.4
Metode Simpson 1/3

$$c = (a+b)/2 \quad ; \quad \Delta x = (b-a)/2$$

$$I = \frac{\Delta x}{3} [f(a) + 4f(c) + f(b)] \quad (7.3)$$

dengan memasukkan nilai Δx ke persamaan (7.3), diperoleh:

$$I = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(c) + f(b)] \quad (7.4)$$

Contoh 4:

Tentukan integral berikut dengan menggunakan metode Simpson 1/3, dan berapa kesalahan yang terjadi dibandingkan dengan penyelesaian eksaknya ;

$$I = \int_0^4 e^x dx$$

Penyelesaian eksak $I = e^4 - e^0 = 53,598$

Penyelesaian dengan metode Simpson 1/3, menggunakan persamaan (7.4):

$$a = 0, \quad b = 4, \quad c = (0+4)/2 = 2$$

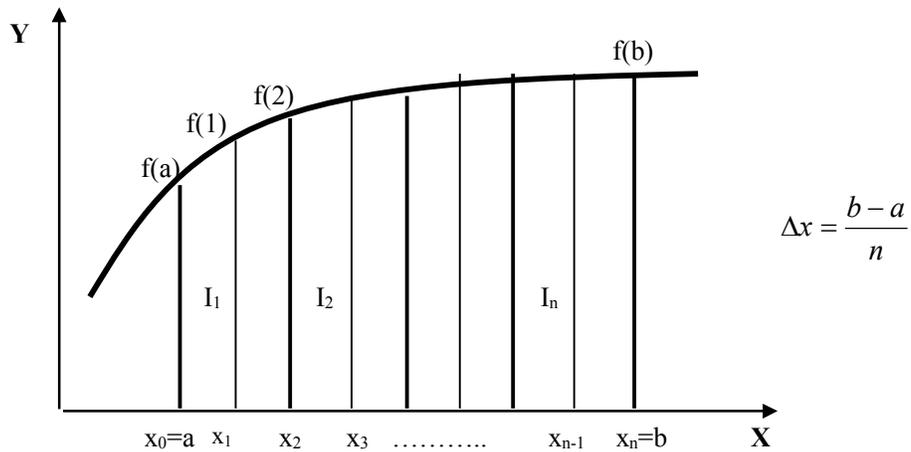
$$I = \frac{4-0}{6} [e^0 + 4e^2 + e^4] = 56,7696$$

Sehingga kesalahan yang terjadi:

$$\varepsilon = \frac{53,598 - 56,7696}{53,598} \cdot 100\% = -5,917\%$$

7.4. Metode Simpson 1/3 Banyak Pias

Untuk mendapatkan hasil yang lebih teliti, maka luasan dibagi menjadi beberapa pias kecil.



Gambar 7.5.
Metode Simpson dengan banyak pias

Luas total:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{\Delta x}{3} \left[f(a) + f(b) + 4 \sum f(x)_{\text{ganjil}} + 2 \sum f(x)_{\text{genap}} \right] \quad (7.5)$$

Contoh 5.

Hitung:

$$I = \int_0^4 e^x dx, \text{ dengan } \Delta x = 1$$

Jawab:

Karena $\Delta x = 1$ maka interval $a = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $b = 4$

Menggunakan persamaan (7.5)

$$I = 1/3 [e^0 + e^4 + 4(e^1 + e^3) + 2(e^2)] = 53.86.$$

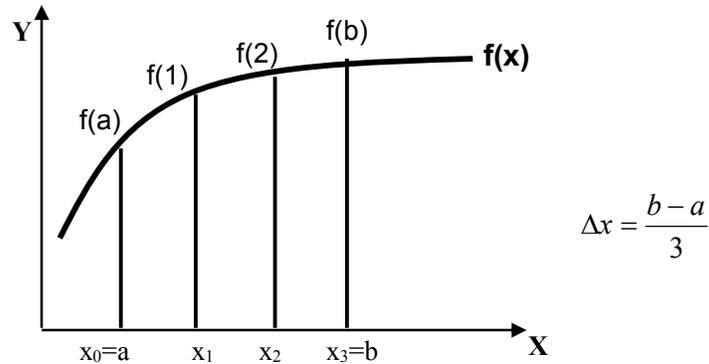
Besar kesalahan yang terjadi:

$$\varepsilon = \frac{53,598 - 53,86}{53,598} \cdot 100\% = -0,488\%$$

Hasil yang diperoleh lebih baik dibandingkan dengan metode sebelumnya.

7.5. Metode Simpson 3/8 Satu Pias

Dalam metode ini digunakan polinomial Lagrange order tiga yang melalui empat titik untuk integrasi.



Gambar 7.6
Metode Simpson 3/8 Satu Pias

$$I = \frac{3\Delta x}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] \quad (7.6)$$

Persamaan (7.6) dikenal dengan aturan Simpson 3/8 karena Δx dikalikan dengan 3/8. Dengan memasukkan nilai Δx maka persamaan (7.6) dapat ditulis dalam bentuk:

$$I = \frac{b-a}{8} [f(a) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(b)] \quad (7.7)$$

Contoh 6.

Hitung Integral dibawah ini dengan aturan Simpson 3/8 dan dengan menggunakan 5 pias memakai gabungan Simpson 1/3 dan Simpson 3/8:

$$I = \int_0^4 e^x dx$$

Jawab:

Dengan menggunakan aturan Simpson 3/8:

Untuk $a = 0$ dan $b = 4$, maka $\Delta x = (4-0)/3 = 1,333333$, sehingga :

$a = 0$, $x_1 = 1,3333$, $x_2 = 2,666667$, $b = 4$

Menggunakan persamaan (7.7)

$$I = \frac{4-0}{8} [e^0 + 3e^{1,3333} + 3e^{2,6667} + e^4] = 55,0779$$

Besar kesalahan yang terjadi:

$$\varepsilon = \frac{53,598 - 55,0779}{53,598} \cdot 100\% = -2,761\%$$

Dengan menggunakan 5 pias maka $\Delta x = (4-0)/5 = 0,8$ dengan :

$$a = 0 ; x_1 = 0,8 ; x_2 = 1,6 ; x_3 = 2,4 ; x_4 = 3,2 ; b = 4$$

Integral dua pias pertama dihitung dengan menggunakan Simpson 1/3:

$$I_1 = (1,6 - 0)/3 [e^0 + 4e^{0,8} + e^{1,6}] = 3,96138$$

Integral tiga pias berikutnya dihitung dengan menggunakan Simson 3/8:

$$I_2 = (4 - 1,6)/8 [e^{1,6} + 3e^{2,4} + 3e^{3,2} + e^4] = 49,86549$$

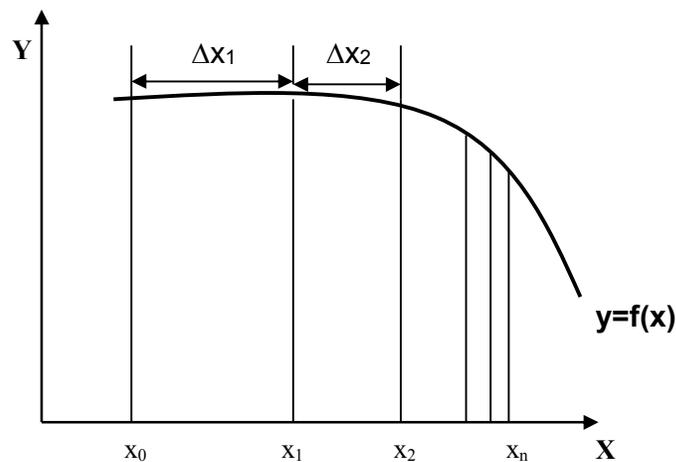
Integral total:

$$I = I_1 + I_2 = 3,96138 + 49,86549 = 53,826873.$$

Besar kesalahan yang terjadi:

$$\varepsilon = \frac{53,598 - 53,8268}{53,598} \cdot 100\% = -0,427\%$$

7.6. Integral Dengan Panjang Pias Tidak Sama.



Gambar 7.7
Integral dengan panjang pias tidak sama

Perumusan yang telah ditampilkan didepan semuanya menggunakan Δx yang sama. Dalam praktek sering dijumpai suatu keadaan dimana diperlukan pembagian pias yang tidak sama, seperti terlihat dalam gambar (7.7). Pada kurva yang melengkung diperlukan banyak pias sehingga ukuran piasnya lebih kecil dibandingkan dengan pias pada kurva yang lebih datar. Metode yang digunakan untuk menghitung integral ini adalah metode trapesium banyak pias dengan ukuran pias tidak sama.

$$I = \Delta x_1 \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \Delta x_2 \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + \Delta x_n \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}$$

Dengan $\Delta x_1 \neq \Delta x_2 \neq \Delta x_3 \neq \Delta x_n$

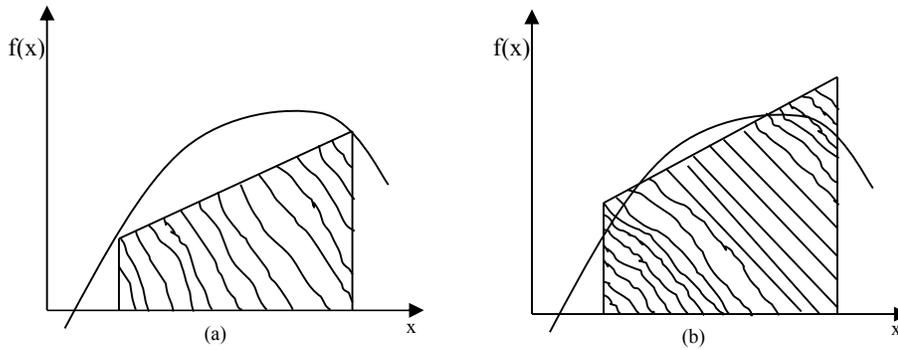
7.7. Metode Kuadratur

Dalam aturan Trapesium dan Simpson, fungsi yang diintegrasikan secara numerik terdiri dari dua bentuk yaitu tabel dan fungsi. Dalam metode kuadratur terutama yang akan dibahas yaitu metode Gauss Kuadratur, data yang diberikan berupa fungsi.

Pada aturan Trapesium dan Simpson, integral didasarkan pada nilai-nilai di ujung-ujung pias. Seperti nampak dalam gambar (7.8a) aturan Simpson didasarkan pada luasan dibawah garis lurus yang menghubungkan nilai-nilai dari fungsi pada ujung-ujung interval integrasi. Rumus yang digunakan untuk menghitung luasan adalah:

$$I = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \tag{7.8}$$

dengan a dan b adalah batas integrasi dan (b-a) adalah lebar dari interval integrasi. Karena aturan trapesium harus melalui titik-titik ujung, maka seperti terlihat dalam gambar (7.8a) rumus trapesium memberikan kesalahan cukup besar. Di dalam metode Gauss Kuadratur dihitung luasan dibawah garis lurus yang menghubungkan dua titik sembarang pada kurva. Dengan menetapkan posisi dari kedua titik tersebut secara bebas, maka akan bisa ditentukan garis lurus yang menyeimbangkan antara kesalahan positif dan negatif, seperti terlihat dalam gambar (7.8b). Metode Gauss Kuadratur yang akan dipelajari dalam sub bab ini adalah rumus Gauss-Legendre.



Gambar 7.8

Bentuk grafis aturan trapesium dan Gauss Kuadratur

Dalam aturan Trapesium, persamaan integral seperti diberikan oleh persamaan (7.8) dapat dituliskan dalam bentuk :

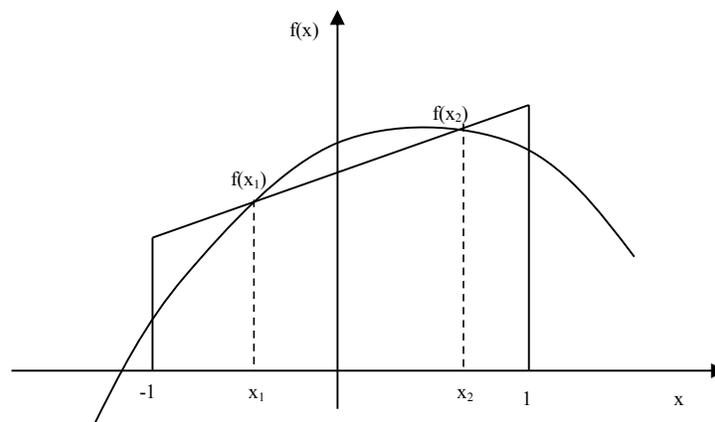
$$I = c_1 f(a) + c_2 f(b) \tag{7.9}$$

Dengan c adalah konstanta. Dari persamaan tersebut akan dicari koefisien c_1 dan c_2 .

Seperti halnya dengan aturan trapesium, dalam metode Gauss Kuadratur juga akan dicari koefisien-koefisien dari persamaan yang berbentuk:

$$I = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \tag{7.10}$$

Dalam hal ini variabel x_1 dan x_2 adalah tidak tetap, dan akan dicari, seperti terlihat dalam gambar 7.9. persamaan (7.10) mengandung empat bilangan tidak diketahui yaitu c_1 , c_2 , x_1 , x_2 .



Gambar 7.9
Integrasi Gauss Kuadratur

Sehingga diperlukan empat persamaan untuk menyelesaikannya. Untuk itu dianggap persamaan (7.10) harus memenuhi integral dari empat fungsi yaitu $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$. Sehingga untuk

$$f(x) = x^3 \quad : \quad c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0 = c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3$$

$$f(x) = x^2 \quad : \quad c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = \int_{-1}^1 x^2 dx = 2/3 = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2$$

$$f(x) = x \quad : \quad c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = \int_{-1}^1 x dx = 0 = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$f(x) = 1 \quad : \quad c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = \int_{-1}^1 1 dx = 2 = c_1 + c_2$$

Sehingga didapat sistem persamaan:

$$c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = 0$$

$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = 2/3$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$$

$$c_1 + c_2 = 2$$

Penyelesaian dari persamaan diatas adalah:

$$c_1 = c_2 = 1$$

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0,577350269$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577350269$$

Substitusi dari hasil tersebut ke dalam persamaan (7.10) menghasilkan rumus Gauss-Legendre dua titik:

$$I = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (7.11)$$

Batas-batas integrasi yang digunakan adalah dari -1 sampai 1 , sehingga lebih memudahkan hitungan dan membuat rumus yang didapat bisa digunakan secara umum. Dengan melakukan transformasi, batas-batas integrasi yang lain dapat diubah ke dalam bentuk tersebut. Untuk itu dianggap terdapat hubungan antara variabel baru x_d dan variabel asli x secara linier dalam bentuk:

$$x = a_0 + a_1 x_d \quad (7.12)$$

Apabila batas bawah adalah $x = a$, untuk variabel baru batas tersebut adalah $x_d = -1$. Kedua nilai tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan (7.12);

$$a = a_0 + a_1 \quad (1) \quad (7.13)$$

dan

$$b = a_0 + a_1 \quad (1) \quad (7.14)$$

Persamaan (7.13) dan (7.14) dapat diselesaikan secara simultan dan hasilnya adalah:

$$a_0 = \frac{b+a}{2} \quad (7.15)$$

dan

$$a_1 = \frac{b-a}{2} \quad (7.16)$$

Substitusi persamaan (1.15) dan (7.16) ke dalam persamaan (7.12) menghasilkan:

$$x = \frac{(b+a) + (b-a)x_d}{2} \quad (7.17)$$

Diferensial dari persamaan tersebut menghasilkan:

$$dx = \frac{b-a}{2} dx_d \quad (7.18)$$

Persamaan (7.17) dan (7.18) dapat disubstitusikan ke dalam persamaan yang diintegrasikan.

Bentuk rumus Gauss Kuadratur untuk dua titik dapat dikembangkan untuk lebih banyak titik, yang secara umum mempunyai bentuk:

$$I = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \dots + c_n f(x_n) \quad (7.19)$$

Nilai c dan x sampai untuk rumus dengan enam titik diberikan dalam tabel 7.1.

Tabel 7.1. Nilai c dan x pada rumus Gauss Kuadratur

Jumlah titik	Koefisien c	Variabel x
2	$c_1 = 1,00000000$	$x_1 = -0,577350269$
	$c_2 = 1,00000000$	$x_2 = 0,577350269$
3	$c_1 = 0,55555556$	$x_1 = -0,774596669$
	$c_2 = 0,88888889$	$x_2 = 0,000000000$
	$c_3 = 0,55555556$	$x_3 = 0,774596669$
4	$c_1 = 0,347854845$	$x_1 = -0,861136312$

	$c_2 = 0,652145155$ $c_3 = 0,652145155$ $c_4 = 0,347854845$	$x_2 = -0,339981044$ $x_3 = 0,339981044$ $x_4 = 0,861136312$
5	$c_1 = 0,236926885$ $c_2 = 0,478628670$ $c_3 = 0,568888889$ $c_4 = 0,478628670$ $c_5 = 0,236926885$	$x_1 = -0,906179846$ $x_2 = -0,538469310$ $x_3 = 0,000000000$ $x_4 = 0,538469310$ $x_5 = 0,906179846$
6	$c_1 = 0,171324492$ $c_2 = 0,360761573$ $c_3 = 0,467913935$ $c_4 = 0,467913935$ $c_5 = 0,360761573$ $c_6 = 0,171324492$	$x_1 = -0,932469514$ $x_2 = -0,661209386$ $x_3 = -0,238619186$ $x_4 = 0,238619186$ $x_5 = 0,661209386$ $x_6 = 0,932469514$

Contoh soal;

Hitung $I = \int_0^4 e^x dx$ dengan menggunakan metode Gauss Kuadratur.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan persamaan (7.17) untuk $a = 0$ dan $b = 4$

$$x = \frac{(4+0) + (4-0)x_d}{2} = 2 + 2x_d$$

Turunan dari persamaan tersebut adalah:

$$dx = 2 dx_d$$

Kedua persamaan tersebut disubstitusikan ke persamaan soal,

$$\int_0^4 e^x dx = \int_{-1}^1 e^{2+2x_d} 2 dx_d$$

Ruas kanan dari persamaan diatas dapat digunakan untuk menghitung luasan dengan metode Gauss Kuadratur, dengan memasukkan nilai $x_d = x_1 = -0.577350269$ dan $x_d = x_2 = 0.577350269$.

Untuk $x_1 = -0.577350269$; $2e^{(2+2(-0.577350269))} = 4.6573501$

Untuk $x_2 = 0.577350269$; $2e^{(2+2(0.577350269))} = 46,8920297$

Luas total adalah:

$$I = 4.6573501 + 46,8920297 = 51.549380$$

Kesalahan:

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= (53,598150 - 51.549380) / 53,598150 \times 100\% \\ &= 3,82 \%\end{aligned}$$

Contoh ;

Hitung $I = \int_0^4 e^x dx$ dengan menggunakan metode Gauss Kuadratur 3 titik.

Penyelesaian:

Untuk 3 titik, maka

$$I = c_1f(x_1) + c_2f(x_2) + c_3f(x_3)$$

Seperti terlihat dalam tabel 7.1, untuk 3 titik koefisien c dan x adalah:

$$c_1 = 0,55555556$$

$$c_2 = 0,88888889$$

$$c_3 = 0,55555556$$

$$x_1 = -0,774596669$$

$$x_2 = 0,000000000$$

$$x_3 = 0,774596669$$

Dari contoh sebelumnya, didapat persamaan yang telah dikonversi:

$$\int_0^4 e^x dx = \int_{-1}^1 e^{2+2x_d} 2dx_d$$

$$\text{Untuk } x_1 = -0,774596669 \quad ; 2e^{(2+2(-0.774596669))} = 3.13915546$$

$$\text{Untuk } x_2 = 0,0 \quad ; 2e^{(2+2(0))} = 14.7781122$$

$$\text{Untuk } x_3 = 0,774596669 \quad ; 2e^{(2+2(0.774596669))} = 69.57049250$$

Sehingga;

$$I = 0,55555556 \times 3.13915546 + 0,88888889 \times 14.7781122 + 0,55555556 \times 69.57049250$$

$$I = 53.5303486$$

Kesalahan yang terjadi:

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= (53,598150 - 53.5303486) / 53,598150 \times 100\% \\ &= 0.13\%\end{aligned}$$

7.8. Soal-soal latihan.

1. Sebuah sungai dengan lebar 80 meter, dengan kedalaman d pada jarak x diukur dari salah satu tepinya yang diberikan oleh tabel berikut.

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
d	0	4	7	9	12	15	14	8	3

Dengan aturan Simpson, dapatkan luas penampang melintang sungai tersebut.

2. Dengan aturan Simpson $3/8$, dapatkan nilai dari integral dibawah ini.

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \text{ dengan } h = 1/6.$$

3. Dengan aturan Trapesium dan Simpson, selesaikan integral dibawah ini:

a. $I = \int_3^7 x^2 \ln x dx$

b. $I = \int_0^{0.8} \cos x^2 dx$

4. Kecepatan dari sebuah mobil yang bergerak sepanjang jalan raya yang mendatar pada selang-selang waktu 2 menit disajikan dalam tabel berikut.

Waktu dalam menit	0	2	4	6	8	10	12
Kecepatan km/jam	0	22	30	27	18	7	0

Dengan aturan simpson, dapatkan jarak yang ditempuh mobil tersebut.

BAB VIII

PERSAMAAN DIFERENSIAL

.....

8.1. Pendahuluan

Banyak permasalahan dalam bidang ilmu pengetahuan dan teknik yang dapat diformulasikan ke dalam bentuk persamaan diferensial, seperti persamaan lendutan balok, teori getaran, profil permukaan air di sungai dan sebagainya. Persamaan Diferensial adalah suatu persamaan yang didalamnya mengandung turunan suatu fungsi seperti y' maupun y'' . Persamaan diferensial dapat dibedakan menjadi dua macam yang tergantung pada jumlah variabel bebas. Apabila persamaan tersebut mengandung hanya satu variabel bebas, persamaan tersebut disebut persamaan diferensial biasa, dan jika mengandung lebih dari satu variabel bebas disebut persamaan diferensial parsial. Untuk persamaan yang sederhana penyelesaian secara analitis masih memungkinkan. Tetapi kalau persamaannya sudah kompleks maka penyelesaian secara numerik akan memberikan hasil yang mendekati nilai eksaknya. Derajat (order) dari persamaan diferensial ditentukan dari derajat tertinggi dari turunannya.

Contoh persamaan diferensial order 1:

$$x \frac{dy}{dx} + 2y + 4 = 0$$

Bentuk persamaan diferensial order 2:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

Penyelesaian persamaan diferensial adalah suatu fungsi yang memenuhi persamaan diferensial dan juga memenuhi kondisi awal (initial condition) yang diberikan pada persamaan tersebut. Didalam penyelesaian persamaan diferensial secara analitis, biasanya dicari penyelesaian umum yang mengandung konstanta sembarang dan kemudian mengevaluasi konstanta tersebut sehingga hasilnya sesuai dengan kondisi awal. Metode penyelesaian persamaan diferensial terbatas pada persamaan-persamaan dengan bentuk tertentu, dan biasanya hanya untuk menyelesaikan persamaan linier dengan koefisien konstan.

Misalnya suatu persamaan diferensial order satu berikut.

$$dy/dx = y \tag{8.1}$$

Penyelesaian dari persamaan tersebut adalah:

$$y = C e^x \quad (8.2)$$

yang memberikan banyak fungsi untuk berbagai koefisien C. Untuk mendapatkan penyelesaian tunggal diperlukan informasi tambahan, misalnya nilai $y(x)$ dan turunannya pada nilai x tertentu. Untuk persamaan order n biasanya diperlukan n kondisi untuk mendapatkan penyelesaian tunggal $y(x)$. Apabila semua n kondisi diberikan pada nilai x yang sama (misalnya x_0) maka permasalahan tersebut dengan problem nilai awal. Apabila dilibatkan lebih dari satu nilai x , permasalahan tersebut dengan problem nilai batas. Misalnya persamaan (8.1) disertai dengan kondisi awal:

$$\text{di } x = 0, \quad y(x=0) = 1 \quad (8.2a)$$

Substitusi persamaan (8.2a) ke dalam persamaan (8.2) memberikan :

$$1 = C e^0$$

dimana :

$$C = 1$$

Dengan demikian penyelesaian tunggal yang memenuhi persamaan:

$$dy/dx = y$$

$$y(x=0) = 1$$

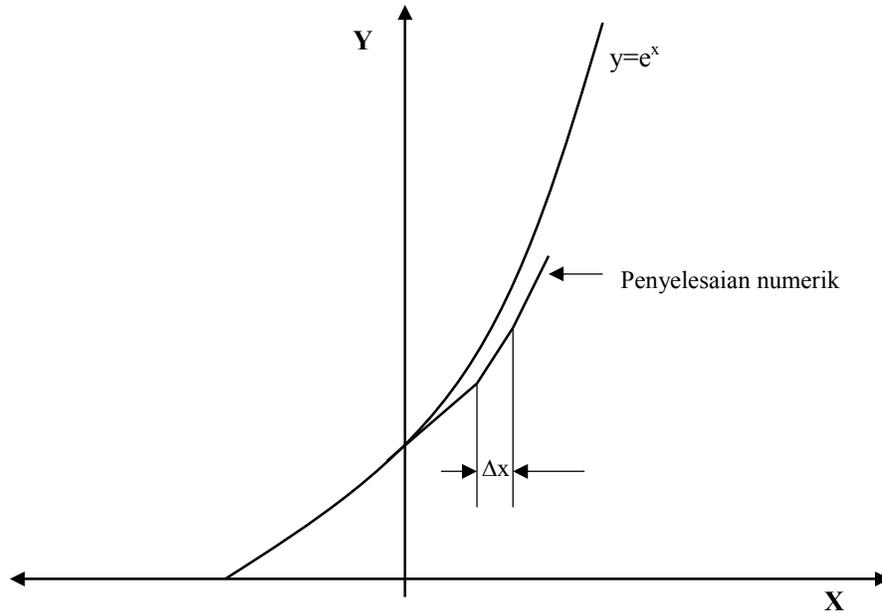
adalah

$$y = e^x$$

Metode penyelesaian numerik tidak ada batasan mengenai bentuk persamaan diferensial. Penyelesaian berupa tabel nilai-nilai numerik dari fungsi untuk berbagai variabel bebas. Penyelesaian suatu persamaan diferensial dilakukan pada titik-titik yang ditentukan secara berurutan. Untuk mendapatkan hasil yang lebih teliti maka jarak antara titik-titik yang berurutan tersebut dibuat semakin kecil.

Misalnya akan diselesaikan persamaan (8.1) dan (8.2a). Penyelesaian dari persamaan tersebut adalah mencari nilai y sebagai fungsi dari x . Persamaan diferensial memberikan kemiringan kurva pada setiap titik sebagai fungsi x dan y . Hitungan dimulai dari nilai awal yang diketahui, misalkan di titik $(x_0; y_0)$. Kemudian dihitung kemiringan kurva (garis singgung) di titik tersebut dan diteruskan dengan membuat interval kecil pada garis singgung tersebut. Apabila interval adalah Δx , maka hitungan sampai pada titik baru $x_1 = x_0 + \Delta x$, dan dari kemiringan garis

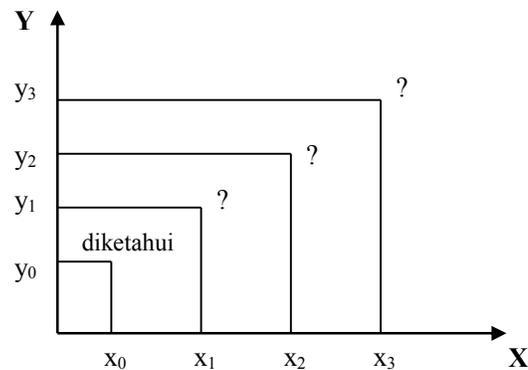
singgung, berdasarkan persamaan diferensial akan diperoleh nilai baru y , yaitu y_1 . Prosedur ini diulangi lagi untuk mendapatkan nilai y selanjutnya seperti terlihat dalam gambar 8.1.



Gambar 8.1.
Penyelesaian numerik persamaan diferensial

Ada dua permasalahan dalam persamaan diferensial yaitu:

1. Initial Value Problem (IVP)
 - Persamaan diferensial yang diketahui nilai awalnya
 - Umumnya persamaan diferensial order satu.

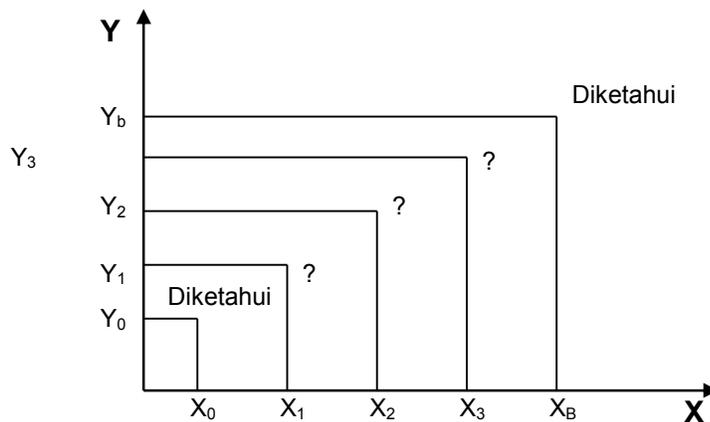
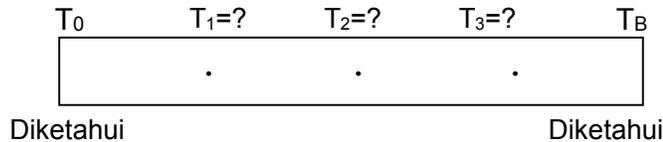


Gambar 8.2
Initial Value Problem

Harga awal x_0 dan y_0 diketahui, kemudian dicari nilai x_1, x_2, x_3 dan y_1, y_2, y_3 .

2. Boundary Value Problem (BVP)

- Persamaan diferensial yang diketahui nilai batasnya.
- Umumnya persamaan diferensial order dua.



Gambar 8.3
Boundary Value Problem

Ada tiga metode yang akan dibahas dalam Initial Value Problem:

1. Metode Euller
2. Metode Euller yang dimodifikasi
3. Metode Runge-Kuta

8.2. Metode Euller

Metode Euller dikembangkan dari persamaan deret Taylor:

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h y'(x_0) + \frac{1}{2} h^2 y''(x_0) + \dots$$

Suku ketiga dan seterusnya diabaikan, sehingga persamaannya menjadi

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h y'(x_0) \quad (8.3)$$

$$dy/dx = y' = f(x,y)$$

$y(x_0) = y_0$; dimana x_0, y_0 merupakan nilai awal yang diketahui

h = increment dari x (penambahan x)

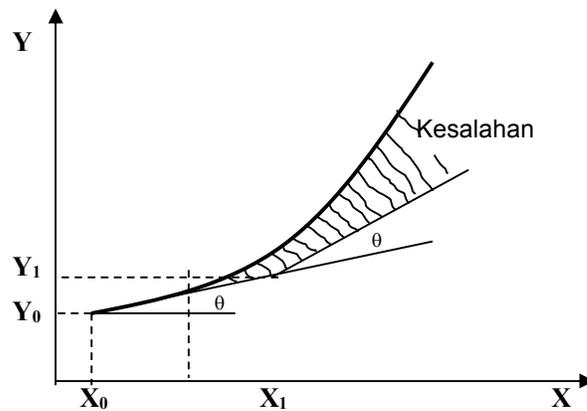
$y'(x_0)$ = slope dari kurva.

Persamaan (8.1) dapat dituliskan:

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h f(x_0, y_0)$$

Atau yang lebih umum:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad ; n = 0,1,2,3,\dots \quad (8.4)$$



Gambar 8.4
Kesalahan menggunakan metode I.V.P.

Contoh 1.

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2y + 3y^2 + x^2 + 3$$

dengan initial condition : $x_0 = 1, y_0 = 1$

Tentukan y untuk $x = 1,2$ dengan $h = 0,2$ dan $h = 0,1$

Jawab:

a. Untuk $h = 0,2$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad ; n = 0$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$y_{(x=1,2)} = 1 + 0,2 f(1, 1)$$

$$y_{(x=1,2)} = 1 + 0,2 [2(1)^2(1) + 3(1)^2(1) + (1)^2 + 3]$$

$$= 1 + 0,2 [9]$$

$$= 2,8$$

b. Untuk $h = 0,1$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$y(x=1,1) = 1 + 0,1 f(1, 1)$$

$$= 1 + 0,1 (9)$$

$$= 1,9$$

Sehingga $(x_1, y_1) = (1,1 ; 1,9)$

$$y(x=1,2) = y_1 + h f(x_1, y_1)$$

$$= 1,9 + 0,1 f(1,1 ; 1,9)$$

$$= 1,9 + 0,1 [2(1,1)^2(1,9) + 3(1,9)^2(1,1) + (1,1)^2 + 3]$$

$$= 1,9 + 0,1 [20,72]$$

$$= 3,9721$$

Dari hasil diatas terlihat bahwa dengan menggunakan h yang semakin kecil, maka hasil yang diperoleh semakin baik (kesalahan semakin kecil).

8.3. Metode Euler Yang Dimodifikasi

Metode Euler Yang Dimodifikasi digunakan untuk memperbaiki metode Euler sebelumnya. Prinsipnya juga menggunakan deret Taylor:

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h y'(x_0) + \frac{1}{2} h^2 y''(x_0) + \dots \quad (8.5)$$

Dengan menggunakan hanya tiga suku awal dari ruas kanan persamaan.

Sebagai pendekatan:

$$y''(x_0) = \frac{\Delta y'}{\Delta x} = \frac{y'(x_0 + h) - y'(x_0)}{h} \quad (8.6)$$

Persamaan (8.4) disubstitusikan ke persamaan (8.3)

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h y'(x_0) + \frac{h^2}{2} \left[\frac{y'(x_0 + h) - y'(x_0)}{h} \right]$$

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h y'(x_0) + \frac{h y'(x_0 + h)}{2} - \frac{h}{2} y'(x_0)$$

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + \frac{h}{2} [y'(x_0) + y'(x_0 + h)]$$

Dimana;

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

$$y'(x_0 + h) = f[x_0 + h, y(x_0 + h)]$$

Karena $y(x_0 + h)$ masih dicari maka yang digunakan adalah $y^*(x_0 + h)$

Penyelesaian metode Euler yang dimodifikasi dilakukan dengan dua langkah pokok:

$$y^*_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*_{n+1})] \quad (8.7)$$

Untuk $n = 0$ maka;

$$y^*_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y^*_1)]$$

Contoh 2.

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2y + 3y^2 + x^2 + 3$$

dengan initial condition : $x_0 = 1, y_0 = 1$

Tentukan y untuk $x = 1,1$ dengan $h = 0,1$

Jawab;

Dengan menggunakan perumusan (8.5) maka:

$$y^*_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$\begin{aligned} y^*_1 &= 1 + 0,1[2(1)^2(1) + 3(1)^2 + (1)^2 + 3] \\ &= 1,9 \end{aligned}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y^*_1)]$$

$$y_1 = 1 + \frac{0,1}{2} [(2(1)^2(1) + 3(1)^2 + (1)^2 + 3) + (2(1,1)^2(1,9) + 3(1,9)^2(1,1) + (1,1)^2 + 3)]$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + 0,05 [9 + 20,721] \\ &= 2,48605. \end{aligned}$$

8.4. Metode Runge-Kutta

Metode Euler memanfaatkan deret Taylor order 1

Metode Euler yang dimodifikasi memanfaatkan deret Taylor order 2

Sedangkan metode Runge-Kutta menggunakan deret Taylor sampai dengan order

4.

Perumusan metode Runge-Kutta sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3}{6}$$

$$\text{IC : } x = x_0 \quad (8.8)$$

$$y = y_0$$

Dimana:

$$k_0 = h f(x_n, y_n)$$

$$k_1 = h f(x_n + 0,5h, y_n + 0,5 k_0)$$

$$k_2 = h f(x_n + 0,5h, y_n + 0,5 k_1)$$

$$k_3 = h f(x_n + h, y_n + k_2)$$

Untuk $n = 0$

$$y_1 = y_0 + \frac{k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3}{6}$$

$$k_0 = h f(x_0, y_0)$$

$$k_1 = h f(x_0 + 0,5h, y_0 + 0,5 k_0)$$

$$k_2 = h f(x_0 + 0,5h, y_0 + 0,5 k_1)$$

$$k_3 = h f(x_0 + h, y_0 + k_2)$$

Untuk $n = 1$

$$y_2 = y_1 + \frac{k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3}{6}$$

$$k_0 = h f(x_1, y_1)$$

$$k_1 = h f(x_1 + 0,5h, y_1 + 0,5 k_0)$$

$$k_2 = h f(x_1 + 0,5h, y_1 + 0,5 k_1)$$

$$k_3 = h f(x_1 + h, y_1 + k_2)$$

Harga h . ditentukan sendiri oleh pemakai. Semakin kecil harga h semakin kecil nilai kesalahannya.

Contoh 3.

Persamaan diferensial berikut ini:

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2 + 3y^2 + 4xy \quad ; \text{ dengan IC : } x_0 = 1, y_0 = 1$$

Tentukan nilai y pada x = 1,2

Jawab:

Pilih nilai h = 0,2

Maka:

$$y_1 = y_0 + \frac{k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3}{6}$$

dengan:

$$k_0 = h f(x_0, y_0) = 0,2 [2(1)^2 + 3(1)^2 + 4(1)(1)] = 1,8$$

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x_0 + 0,5h, y_0 + 0,5 k_0) \\ &= 0,2 f(1+0,1 ; 1+0,9) \\ &= 0,2 [2(1,1)^2 + 3(1,9)^2 + 4(1,1)(1,9)] \\ &= 4,322 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= h f(x_0 + 0,5h, y_0 + 0,5 k_1) \\ &= 0,2 f(1+0,1 ; 1+2,161) \\ &= 0,2 [2(1,1)^2 + 3(3,16)^2 + 4(1,1)(3,16)] \\ &= 9,25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= h f(x_0 + h, y_0 + k_2) \\ &= 0,2 f(1+0,2 ; 1+9,25) \\ &= 0,2 [2(1,2)^2 + 3(10,25)^2 + 4(1,2)(10,25)] \\ &= 73,4535 \end{aligned}$$

Jadi untuk x = 1,2:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + \frac{1,8 + (4,322).2 + 2(9,25) + 73,4535}{6} \\ &= 18,065. \end{aligned}$$

8.5. Persamaan Diferensial Parsial

Formulasi matematika dari kebanyakan permasalahan dalam ilmu pengetahuan dan teknologi dapat dipresentasikan dalam bentuk persamaan diferensial parsial. Persamaan tersebut merupakan laju perubahan terhadap dua

atau lebih variabel bebas yang biasanya waktu dan jarak (ruang). Bentuk umum persamaan diferensial order 2 dan dua dimensi adalah:

$$a \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + d \frac{\partial \rho}{\partial x} + e \frac{\partial \rho}{\partial y} + f\rho + g = 0$$

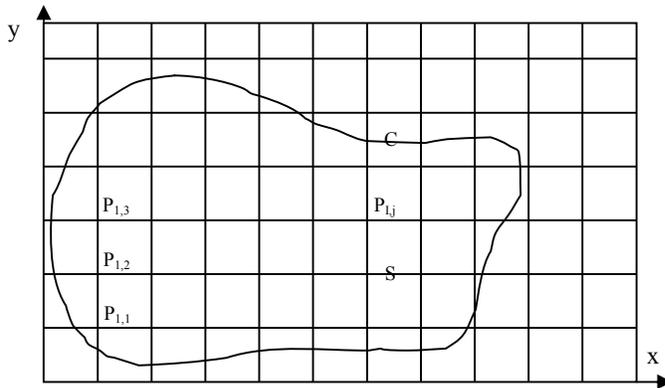
Dengan : a, b, c, d, e, f dan g bisa merupakan fungsi dari variabel x dan y dan variabel tidak bebas ρ, ∂

Persamaan differensial parsial dapat dibedakan menjadi 3 tipe yaitu:

1. Persamaan Ellips jika : $b^2 - 4ac < 0$
2. Persamaan Parabola jika : $b^2 - 4ac = 0$
3. Persamaan Hiperbola jika : $b^2 - 4ac > 0$

Persamaan Parabola biasanya merupakan persamaan yang tergantung pada waktu (tidak permanen). Penyelesaian persamaan tersebut memerlukan kondisi awal dan kondisi batas. Persamaan Ellips biasanya berhubungan dengan masalah keseimbangan atau kondisi permanen (tidak tergantung pada waktu), dan penyelesaiannya memerlukan kondisi batas disekeliling daerah tinjauan. Persamaan Hiperbola biasanya berhubungan dengan getaran, atau permasalahan dimana terjadi diskontinyu dalam waktu, seperti gelombang kejut dimana terdapat diskontinyu dalam kecepatan, tekanan dan rapat massa. Penyelesaian dari persamaan hiperbola, mirip dengan penyelesaian persamaan parabola, yang menghitung nilai ρ untuk nilai x dan t yang diberikan.

Penyelesaian persamaan differensial parsial dengan kondisi awal dan kondisi batas dapat diselesaikan dengan metode beda hingga. Untuk itu dibuat jaringan titik hubungan pada daerah tinjauan. Sebagai contoh penyelesaian persamaan ellips pada daerah S yang dibatasi oleh kurva C seperti dalam gambar 8.5. Daerah tinjauan S dibagi menjadi sejumlah pias (titik hitungan P) dengan jarak antar pias adalah Δx dan Δy . Kondisi dimana variabel tidak bebas (ρ) harus memenuhi disekeliling kurva C disebut dengan kondisi batas. Penyelesaian persamaan diferensial merupakan perkiraan dari nilai ρ pada titik-titik hitungan $P_{11}, P_{12}, \dots, P_{ij}, \dots$. Perkiraan dilakukan dengan mengganti turunan dari persamaan diferensial parsial dengan menggunakan perbedaaan beda hingga.



Gambar 8.5
Penyelesaian persamaan diferensial parsial

8.6. Beberapa Bentuk Persamaan Diferensial Parsial

Berikut ini adalah beberapa bentuk dari persamaan diferensial parsial:

1. Persamaan Ellips

Persamaan yang termasuk dalam tipe ini adalah persamaan Poisson

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + g = 0 \quad (8.9)$$

dan persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} = 0 \quad (8.10)$$

Persamaan ellips biasanya berhubungan dengan masalah-masalah keseimbangan atau aliran permanen, seperti aliran air tanah dibawah bendungan dan karena adanya pemompaan, defleksi plat karena adanya pembebanan.

2. Persamaan Parabola

Permasalahan yang mengandung waktu sebagai variabel bebas biasanya termasuk dalam persamaan Parabola. Bentuk persamaan parabola yang paling sederhana adalah perambatan panas.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (8.11)$$

Dalam persamaan perambatan panas, T adalah temperatur, K adalah koefisien konduktivitas sedangkan t dan x adalah waktu dan jarak.

Penyelesaian dari persamaan tersebut adalah mencari temperatur T untuk nilai x pada setiap waktu t .

3. Persamaan Hiperbola

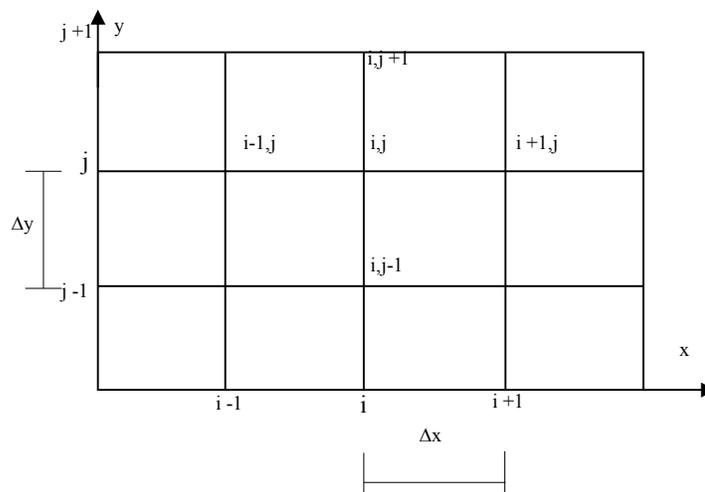
Persamaan hiperbola yang paling sederhana adalah persamaan gelombang.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (8.12)$$

dengan U adalah displacemen pada jarak x dari ujung tali yang bergetar yang mempunyai panjang l sesudah waktu t . Oleh karena nilai U pada ujung-ujung tali biasanya diketahui untuk semua waktu (kondisi awal), maka penyelesaian persamaan adalah serupa dengan penyelesaian pada persamaan parabola, yaitu mengandung U pada x dan t tertentu.

8.7. Perkiraan Diferensial Dengan Beda Hingga.

Gambar 8.6 adalah jaringan titik hitungan pada bidang x - y yang dapat dibagi menjadi sejumlah pias segiempat dengan sisi Δx dan Δy . Panjang pias dalam x adalah sama dan diberi notasi $x_i = i\Delta x$, $i = 0, 1, 2, \dots$; $y_j = j\Delta y$, $j = 0, 1, 2, \dots$



Gambar 8.6
Jaringan titik hitungan pada bidang x - y .

Dengan menggunakan jaringan titik hitungan dalam gambar 8.6, semua diferensial ditulis dalam titik hitungan (i,j). Bentuk turunan pertama dan kedua didekati oleh:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial_{i+1j} - \partial_{ij}}{\Delta x} \quad (8.13)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial_{ij} - \partial_{i-1j}}{\Delta x} \quad (8.14)$$

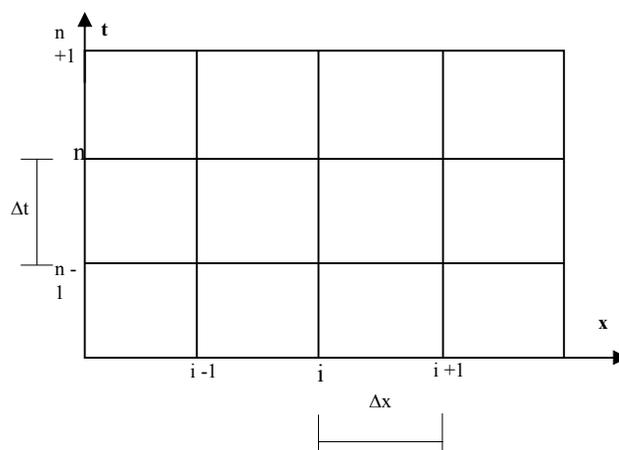
$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial_{i+1j} - \partial_{i-1j}}{2\Delta x} \quad (8.15)$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{\partial_{i-1j} - 2\partial_{ij} + \partial_{i+1j}}{\Delta x^2} \quad (8.16)$$

Bentuk persamaan (8.13), (8.14), (8.15) disebut dengan diferensial maju, mundur dan terpusat. Diferensial terhadap y juga dapat ditulis dalam bentuk seperti diatas. Bentuk persamaan melintang dapat didekati dengan :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} = \frac{\partial_{i+1,j+1} - \partial_{i-1,j+1} - \partial_{i+1,j-1} + \partial_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} \quad (8.17)$$

Untuk persamaan yang mengandung variabel x dan t, perkiraan beda hingga dilakukan dengan membuat jaringan titik hitungan pada bidang x-t (gambar 8.7), yang dibagi dalam sejumlah pias dengan interval ruang dan waktu adalah Δx dan Δt .



Gambar 8.7
Jaringan titik hitungan pada bidang x-t

Bentuk turunan pertama dan kedua terhadap waktu dan ruang adalah:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} \quad (8.18)$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{\rho^n_{i-1} - 2\rho^n_i + \rho^n_{i+1}}{\Delta x^2} \quad (8.19)$$

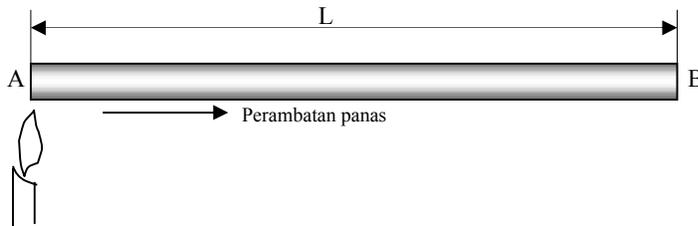
Dalam bentuk beda hingga diatas superskrip n dan n+1 menunjukkan nilai ρ pada waktu n dan n+1. Penulisan n sebagai superskrip yang menunjukkan waktu, untuk membedakan dengan subskrip untuk i,j dan k yang menunjukkan notasi ruang.

8.8. Penyelesaian Persamaan Parabola.

Bentuk paling sederhana dari persamaan parabola adalah:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (8.20)$$

Gambar 8.8 adalah suatu batang besi yang dipanaskan pada ujung A. Panas pada ujung A tersebut akan merambat ke ujung B. Dengan menggunakan persamaan (8.20) akan dapat diprediksi temperatur di sepanjang besi (x) antara A dan B dan pada setiap saat (t).



Gambar 8.8
Perambatan panas pada batang

Dalam permasalahan tersebut, temperatur pada ujung-ujung batang (titik A dan B) yang mempunyai jarak L diketahui untuk seluruh waktu. Kondisi ini disebut dengan kondisi batas. Selain itu distribusi temperatur di sepanjang batang pada waktu tertentu (pada awal hitungan) juga diketahui; dan kondisi ini disebut dengan kondisi awal.

Penyelesaian persamaan tersebut akan memberikan nilai T antara 0 dan L(x) dan untuk waktu (t) dari 0 sampai tak berhingga. Jadi daerah integrasi S dalam bidang

x - t (gambar 8.9) mempunyai luas tak terhingga yang dibatasi oleh sumbu x dan garis-garis sejajar pada $x=0$ dan $x=L$. Bidang tersebut disebut dengan daerah terbuka karena batas kurva C tidak tertutup.

Dalam gambar 8.8, suatu batang penghantar panas mempunyai distribusi temperatur awal pada $t=0$, dan pada ujung-ujungnya mempunyai temperatur yang merupakan fungsi waktu. Distribusi temperatur (x,t) di batang pada waktu $t>0$ dapat dihitung dengan anggapan bahwa sifat-sifat fisik batang adalah konstan. Permasalahan dapat dipresentasikan dalam bentuk persamaan diferensial dengan kondisi awal dan batas.

Persamaan (8.20) berlaku untuk daerah $0 < x < L$ dan $0 < t < \tau$ dengan τ adalah waktu hitungan total, sedangkan kondisi awal dan batas adalah:

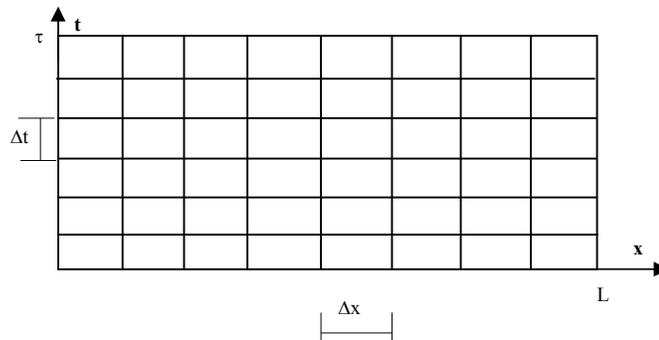
$$\begin{aligned} T(x,0) &= f(x) & : 0 \leq x \leq L \\ T(0,t) &= g_0(t) & : 0 < t \leq \tau \\ T(L,t) &= g_1(t) & : 0 < t \leq \tau \end{aligned} \tag{8.21}$$

Disini, $f(x)$ adalah kondisi awal; $g_0(t)$ dan $g_1(t)$ adalah kondisi batas

Ada tiga metode untuk menyelesaikan persamaan parabola, yaitu:

1. Skema eksplisit
2. Skema implisif
3. Skema Crank-Nicholson

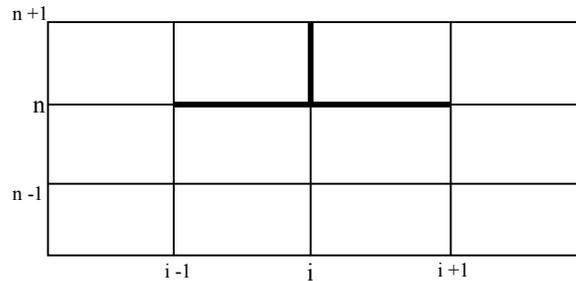
Untuk menyelesaikan persamaan (8.20) dan (8.21) dibuat jaringan titik hitungan pada bidang $0 \leq x \leq L$ dan $0 \leq t \leq \tau$ seperti yang ditunjukkan dalam gambar (8.9), dengan jarak simpul $\Delta x = L/M$; $\Delta t = \tau/N$ dimana M dan N adalah bilangan bulat sembarang.



Gambar 8.9
Jaringan titik hitungan

8.8.1. Skema Eksplisit

Pada skema eksplisit, variabel pada waktu $n+1$ dihitung berdasarkan variabel pada waktu n yang sudah diketahui. Dengan menggunakan skema seperti yang ditunjukkan gambar 8.10, fungsi $f(x,t)$ dan turunannya dalam ruang dan waktu didekati oleh bentuk berikut:



Gambar 8.10
Skema Eksplisit

$$f(x,t) = f_i^n$$

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{f_{i-1}^n - 2f_i^n + f_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

Dengan menggunakan skema diatas. Persamaan (8.20) dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = K_i \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \quad (8.22)$$

Persamaan (8.22) dengan kondisi batas pada kedua ujung diketahui, memungkinkan untuk menghitung T_i^{n+1} ($i = 1 \dots M-1$) berdasarkan nilai T_i^n ($i = 1 \dots M$) yang telah diketahui. Pada awal hitungan, nilai awal dari temperatur T_i^0 diketahui sebagai kondisi awal. Dari nilai awal tersebut dan kondisi batas, dapat dihitung nilai T di sepanjang batang ($i = 1, \dots, M$) pada waktu berikutnya. Nilai yang telah ditentukan tersebut digunakan untuk menghitung T_i ($i = 1, \dots, M$) untuk

waktu berikutnya lagi. Prosedur hitungan ini diulangi lagi sampai akhirnya didapat nilai $T_i (i=1 \dots M)$ untuk semua waktu.

atau

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{K_i \Delta t}{\Delta x} (T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n)$$

8.9. Penyelesaian Persamaan Ellips

Dalam paragraf ini akan dijelaskan bagaimana mendiskriditkan suatu persamaan diferensial parsial ellips dengan kondisi batas untuk dapat ditransformasikan ke dalam suatu sistim dari N persamaan dengan n bagian. Penyelesaian persamaan ellips dilakukan dengan langkah-langkah berikut:

1. Membuat jaringan titik simpul di dalam seluruh bidang yang ditinjau dan batas-batasnya.
2. Pada setiap titik dalam bidang tersebut dibuat turunan-turunannya dalam bentuk beda hingga.
3. Ditulis nilai-nilai fungsi pada semua titik di batas keliling bidang dengan memperhitungkan kondisi batas.

Dengan contoh yang sederhana dalam bidang segiempat akan memudahkan penjelasan penyelesaian persamaan ellips. Contoh tersebut nantinya dapat dikembangkan untuk contoh yang lebih kompleks.

Dipandang suatu persamaan Laplace dalam bidang segiempat

$(0 \leq x \leq 40, 0 \leq y \leq 30)$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} = 0$$

dengan kondisi batas:

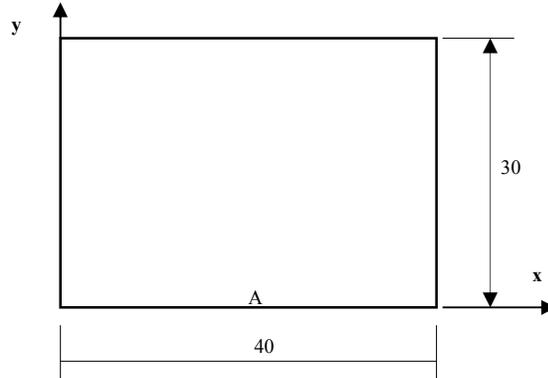
$$\rho(0,y) = 0$$

$$\rho(40,y) = 0$$

$$\rho(x,30) = 0$$

$$\rho(x,0) = 0$$

$$\rho(20,0) = 1$$

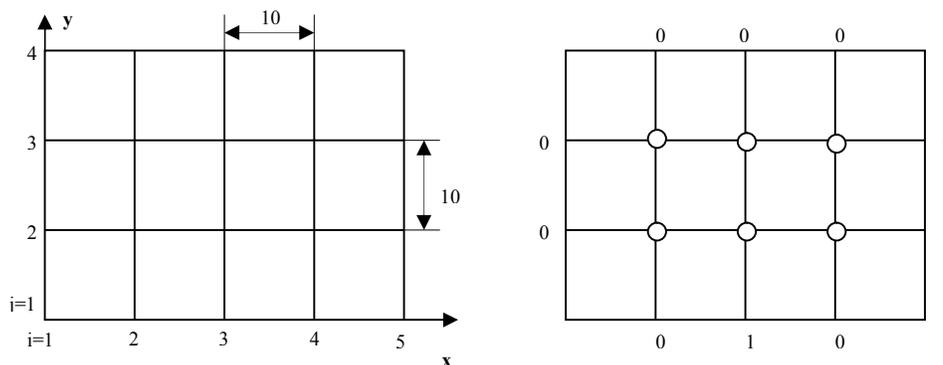


Gambar 8.11

Dalam gambar 8.11 nilai ρ disekeliling bidang adalah 0 kecuali di titik A terjadi gangguan sebesar $\rho_A = 1$. Akan dicari nilai ρ di dalam bidang segiempat tersebut.

Untuk menyelesaikan persamaan diatas terlebih dahulu dibuat jaringan titik hitungan dengan pias 10 seperti terlihat dalam gambar 8.11a. Dalam gambar 8.11b, titik-titik dengan tanda bulat di sekeliling bidang adalah titik batas yang telah diketahui nilai ρ nya, yang dalam hal ini adalah nol, kecuali di titik (3,1) yang nilainya adalah $\rho(3,1) = 1$. Dari kondisi batas tersebut akan dicari nilai ρ pada titik-titik hitungan yang diberi tanda silang (x)

Dengan menggunakan bentuk beda hingga seperti yang diberikan dalam persamaan (8.16) untuk diferensial dalam arah x dan y, maka persamaan Laplace dapat ditulis dalam bentuk berikut:



Gambar 8.12
Jaringan titik hitungan

$$\frac{\rho_{i-1,j} - 2\rho_{i,j} + \rho_{i+1,j}}{\Delta x} + \frac{\rho_{i,j-1} - 2\rho_{i,j} + \rho_{i,j+1}}{\Delta y} = 0 \quad (8.23)$$

Untuk $\Delta x = \Delta y$, maka persamaan (8.23) menjadi:

$$4\rho_{i,j} - \rho_{i-1,j} - \rho_{i+1,j} - \rho_{i,j-1} - \rho_{i,j+1} = 0 \quad (8.24)$$

Untuk jaringan titik hitungan seperti yang diberikan dalam gambar 8.12, persamaan (8.24) dapat ditulis dalam bentuk:

$$\begin{aligned} \text{Titik (2,2)} & : 4\rho_{2,2} - \rho_{1,2} - \rho_{3,2} - \rho_{2,1} - \rho_{2,3} = 0 \\ & \quad 4\rho_{2,2} - \rho_{3,2} - \rho_{2,3} = \rho_{1,2} + \rho_{2,1} \\ \text{Titik (3,2)} & : 4\rho_{3,2} - \rho_{2,2} - \rho_{4,2} - \rho_{3,1} - \rho_{3,3} = 0 \\ & \quad 4\rho_{3,2} - \rho_{2,2} - \rho_{4,2} - \rho_{3,3} = \rho_{3,1} \\ \text{Titik (4,2)} & : 4\rho_{4,2} - \rho_{3,2} - \rho_{5,2} - \rho_{4,1} - \rho_{4,3} = 0 \\ & \quad 4\rho_{4,2} - \rho_{3,2} - \rho_{4,3} = \rho_{3,1} + \rho_{4,1} \\ \text{Titik (2,3)} & : 4\rho_{2,3} - \rho_{1,3} - \rho_{3,3} - \rho_{2,2} - \rho_{2,4} = 0 \\ & \quad 4\rho_{2,3} - \rho_{3,3} - \rho_{2,2} = \rho_{1,3} + \rho_{2,4} \\ \text{Titik (3,3)} & : 4\rho_{3,3} - \rho_{2,3} - \rho_{4,3} - \rho_{3,2} - \rho_{3,4} = 0 \\ & \quad 4\rho_{3,3} - \rho_{2,3} - \rho_{4,3} - \rho_{3,2} = \rho_{3,4} \\ \text{Titik (4,3)} & : 4\rho_{4,3} - \rho_{3,3} - \rho_{5,3} - \rho_{4,2} - \rho_{4,4} = 0 \\ & \quad 4\rho_{4,3} - \rho_{3,3} - \rho_{4,2} = \rho_{5,3} + \rho_{4,4} \end{aligned} \quad (8.25)$$

Persamaan (8.25) dapat disusun dalam bentuk matrik:

$$\begin{bmatrix} 4 & - & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{2,3} \\ \rho_{3,3} \\ \rho_{4,3} \\ \rho_{2,2} \\ \rho_{3,2} \\ \rho_{4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{1,3} + \rho_{2,4} \\ \rho_{3,4} \\ \rho_{5,3} + \rho_{4,4} \\ \rho_{1,2} + \rho_{2,1} \\ \rho_{3,1} \\ \rho_{5,2} + \rho_{4,1} \end{bmatrix} \quad (8.26)$$

Dalam persamaan (8.26) diatas ruas kanan adalah kondisi batas yang telah diketahui nilainya. Dengan memasukkan kondisi batas di ruas kanan persamaan, maka persamaan (8.26) menjadi:

$$\begin{bmatrix} 4 & - & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{2,3} \\ \rho_{3,3} \\ \rho_{4,3} \\ \rho_{2,2} \\ \rho_{3,2} \\ \rho_{4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.27)$$

Persamaan (8.24) merupakan sistem persamaan linier yang dapat diselesaikan dengan beberapa metode seperti yang telah dipelajari pada bab sebelumnya. Metode penyelesaian persamaan linier dapat dibedakan menjadi dua yaitu metode penyelesaian langsung atau penyelesaian dengan iterasi. Dalam penyelesaian persamaan ellips, pemakaian metode iterasi jauh lebih mudah daripada metode pemakaian langsung. Metode iterasi juga ada dua macam yaitu metode Jacobi dan metode Gauss Seidel. Dengan menggunakan metode Jacobi maka persamaan (8.27) dapat ditulis dalam bentuk:

$$\begin{aligned} \rho_{2,3} &= \frac{\rho_{3,3} + \rho_{2,2}}{4} \\ \rho_{3,3} &= \frac{\rho_{2,3} + \rho_{4,2} + \rho_{3,2}}{4} \\ \rho_{4,3} &= \frac{\rho_{3,3} + \rho_{4,2}}{4} \\ \rho_{2,2} &= \frac{\rho_{2,3} + \rho_{3,2}}{4} \\ \rho_{3,2} &= \frac{1 + \rho_{3,3} + \rho_{2,2} + \rho_{4,2}}{4} \\ \rho_{4,2} &= \frac{\rho_{4,3} + \rho_{3,2}}{4} \end{aligned} \quad (8.28)$$

Hitungan dimulai dengan nilai perkiraan awal sembarang untuk variabel yang dicari, yang dalam contoh ini diambil nol. Setelah dilakukan iterasi akhirnya didapat:

$$\begin{aligned} \rho_{2,2} &= 0,093 \\ \rho_{3,2} &= 0,323 \\ \rho_{4,2} &= 0,093 \\ \rho_{2,3} &= 0,050 \\ \rho_{3,3} &= 0,106 \\ \rho_{4,3} &= 0,050 \end{aligned}$$

Dalam contoh diatas bidang hitung dibagi dalam interval yang jarang (panjang pias 10), sehingga hasil perhitungan kurang teliti. Untuk mendapatkan hasil hitungan yang lebih teliti, maka digunakan panjang pias yang lebih kecil sehingga sebagai konsekwensinya ukuran matrik akan menjadi semakin besar. Perhitungan tidak efisien kalau menggunakan cara manual (kalkulator). Disini mutlak diperlukan bantuan komputer untuk menyelesaikannya.

Secara umum persamaan (8.24) dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\rho_{i,j} = \frac{\rho_{i-1,j} + \rho_{i+1,j} + \rho_{i,j-1} + \rho_{i,j+1}}{4} \quad (8.29)$$

Persamaan (8.29) menunjukkan bahwa nilai ρ di suatu titik adalah rerata dari nilai ρ di titik-titik sekitarnya. Persamaan (8.29) diselesaikan untuk mendapatkan nilai $\rho_{i,j}$ dengan $i = 2, \dots, N-1$ dan $j = 2, \dots, M-1$. Pada awal hitungan semua nilai $\rho_{i,j}$ ditetapkan nol. Hasil yang didapat tersebut digunakan sebagai nilai yang sudah diketahui pada ruas kanan persamaan (8.29) untuk menghitung nilai $\rho_{i,j}$ pada iterasi berikutnya

8.10. Soal-Soal Latihan.

1. Diberikan PD : $y' = x - 2y + 1$; $y(1) = 3$

Dengan metode Euler tentukan nilai y pada $x = 1,1$; $1,2$; $1,3$

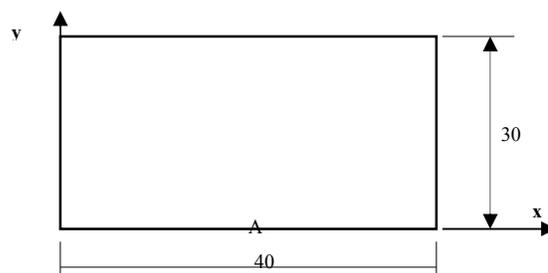
2. Selesaikan soal no 1 dengan metode Euler yang dimodifikasi.

3. Diberikan PD : $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$. Selesaikan dengan metode Runge-Kutta.

4. Diberikan PD : $y' = x^2 y + 6xy + 12x + 4$, $y(2) = 6$.

Tentukan nilai y pada $x = 3$, dengan menggunakan Metode Euler, Euler Modifikasi, maupun metode Runge-Kutta.

5. Dari gambar dibawah ini, dengan menggunakan persamaan ellips tentukanlah nilai ρ didalam bidang, jika kondisi batas nilai ρ disekeliling bidang $=0$ kecuali di $A=2$. Gunakan panjang pias 5.



DAFTAR PUSTAKA

1. Bambang Triatmojo, "*Metode Numerik*" Beta Offset, 1995
2. Chapra, SP., Canale, RP., "*Numerical Method for Engineers*", McGraw-Hill Book Company, New York, 1985.
3. Carl Erik Froberg, "*Introduction to Numerical Analysis*", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1969.
4. Hamming, RW., "*Numerical Method For Scientist and Engineer*", McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1962..